www.sapientia.uji.es | 49



Ecuaciones diferenciales

Beatriz Campos Sancho
Cristina Chiralt Monleon

Ecuaciones diferenciales

Beatriz Campos Sancho
Cristina Chiralt Monleon



Departament de matemàtiques

■ Codi d'assignatura 305

Edita: Publicacions de la Universitat Jaume I. Servei de Comunicació i Publicacions
Campus del Riu Sec. Edifici Rectorat i Serveis Centrals. 12071 Castelló de la Plana
http://www.tenda.uji.es e-mail: publicacions@uji.es

Col·lecció Sapientia, 49
Primera edició, 2011
www.sapientia.uji.es

ISBN: 978-84-693-9777-0



Índice general

Prólogo

Este libro está basado en los contenidos de la asignatura Fundamentos Matemáticos II de la titulación de Ingeniería Industrial y va dirigido, principalmente, a alumnos de primer curso de Ingeniería, tanto de las antiguas titulaciones como de los nuevos grados.

Puesto que está pensado como un curso básico del estudio analítico de las ecuaciones diferenciales, abarca los métodos habituales de resolución de ecuaciones de primer orden y el estudio de las ecuaciones diferenciales lineales, así como sus respectivas aplicaciones.

Los contenidos están divididos en cuatro temas: teoría básica de las ecuaciones diferenciales, ecuaciones diferenciales de primer orden, ecuaciones lineales de segundo orden y de orden superior y finalmente, sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.

Cada uno de los temas se introduce planteando algún problema o fenómeno físico que, una vez modelizado, permite introducir los conceptos matemáticos a estudiar. Hemos incluido también una serie de ejemplos resueltos, prestando mucha atención a las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales estudiadas, principalmente aplicaciones a la Ingeniería. Al final de cada sección, se plantea una colección de ejercicios, acompañados de la solución, para ser resueltos por el alumno.

TEMA 1

Teoría básica de las ecuaciones diferenciales

En el estudio de fenómenos reales en los que se analiza un cambio o una variación, aparecen ecuaciones que relacionan determinadas funciones y sus derivadas. A este tipo de ecuaciones se les denomina ecuaciones diferenciales.

La información que se obtiene a partir de estas ecuaciones nos permite predecir cómo va a evolucionar el modelo que se está estudiando. En particular, la solución de la ecuación diferencial es una función que representa una cantidad cuya variación estamos analizando.

Esta información se puede obtener de una manera explícita, cuando se obtiene la solución de la ecuación diferencial analíticamente. Pero esto no siempre es posible, por ello recurrimos a otras técnicas como el cálculo numérico, que nos permite obtener aproximaciones, o el estudio cualitativo, que permite analizar el comportamiento de las soluciones aunque la expresión de éstas no sea conocida.

Comenzamos este tema introduciéndonos en el ámbito de las ecuaciones diferenciales. En particular, los objetivos de este tema son los siguientes:

- Ver cómo surgen las ecuaciones diferenciales al describir o modelizar determinados problemas.
- Clasificar las ecuaciones diferenciales.
- Estudiar los diferentes tipos de soluciones que se pueden obtener.
- Analizar la existencia y unicidad de las soluciones de las ecuaciones diferenciales.

1.1. Introducción

Comencemos viendo dos modelos sencillos que nos permitan introducirnos en la teoría de las ecuaciones diferenciales.

1. Desintegración radiactiva.

Un fenómeno cuya descripción da lugar a una ecuación diferencial muy sencilla es el de la desintegración de un elemento radiactivo. La rapidez con la que una sustancia radiactiva se desintegra es proporcional a la cantidad presente de dicha sustancia. Esto conduce a la ecuación:

$$\frac{dA}{dt} = -kA, \quad k > 0$$

donde $A(t)$ es la cantidad de sustancia presente en un instante t y k es una constante de proporcionalidad que depende de la sustancia.

Si conseguimos resolver esta ecuación, obtendremos una expresión para la función $A(t)$; por tanto, conoceremos la cantidad de sustancia presente en cada instante t.

Para resolver la ecuación la escribimos de la forma:

$$\frac{1}{A}dA = -kdt$$

e integramos ambos lados, obteniendo:

$$\ln A = -kt + C_1,$$

siendo C_1 cualquier constante arbitraria. Despejando A se tiene:

$$A(t) = e^{-kt}e^{C_1} = Ce^{-kt},$$

siendo C cualquier constante positiva. La constante C puede obtenerse si se conoce la cantidad de sustancia en un instante dado; por ejemplo, si para el instante $t = 0$ había una cantidad inicial A_0 de sustancia, entonces:

$$A_0 = Ce^{-k\,0} = C,$$

por tanto:

$$A(t) = A_0e^{-kt}.$$

Efectivamente, tener la solución de la ecuación nos permite conocer la cantidad de sustancia presente que habrá en cada instante t.

2. Cuerpo en caída libre.

Consideremos un cuerpo que, desde una cierta altura, cae bajo la acción de la fuerza de la gravedad, ignorando otras fuerzas de rozamiento como la debida a la resistencia del aire. En este caso, tenemos dos cantidades que van cambiando con el tiempo: su posición y su velocidad.

Para modelizar este fenómeno, aplicamos la segunda ley de Newton, llegando a la ecuación:

$$m\frac{d^2h}{dt^2} = -m\,g,$$

donde m es la masa del objeto, h es su altura sobre el suelo, d^2h/dt^2 es su aceleración, g es la constante gravitacional y $-mg$ es la fuerza debida a la gravedad.

Lo que nos interesa es determinar cuál es su posición en cada instante y su tipo de movimiento.

Integrando esta ecuación respecto de t obtenemos:

$$\frac{dh}{dt} = -gt + C_1$$

e integrando de nuevo:

$$h(t) = -g\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Las constantes de integración C_1 y C_2 pueden determinarse si se conocen la altura y velocidad iniciales del objeto. Supongamos que éstas son h_0 y v_0, respectivamente. Sustituyendo estos valores en las ecuaciones anteriores para $t = 0$, se obtiene:

$$h(0) = h_0 = -g\frac{0^2}{2} + C_1 0 + C_2, \text{ luego } C_2 = h_0,$$

$$\frac{dh(0)}{dt} = v_0 = -g\,0 + C_1, \text{ luego } C_1 = v_0.$$

Por tanto,

$$h(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + h_0.$$

Observemos que no sólo hemos obtenido una expresión que nos da la posición del objeto en cada instante t, sino que también conocemos su derivada, es decir, la velocidad del objeto, en cada instante t.

1.2. Definición de ecuación diferencial

Una ecuación diferencial es aquélla que involucra una función junto con sus derivadas y la variable o variables de la que depende:

■ **Definición 1.1.** Una **ecuación diferencial** es una ecuación que relaciona una función desconocida (la variable dependiente), las variables de las que depende (variables independientes) y sus derivadas respecto de estas variables independientes:

$$F(x_1, x_2, ...x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, ...\frac{\partial y}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}, ...) = 0. \qquad (1.1)$$

En las ecuaciones diferenciales pueden aparecer ciertos términos constantes, relacionados con el problema, que reciben el nombre de **parámetros**. Por ejemplo, las constantes k, m y g que hemos visto en los problemas introductorios.

Las ecuaciones diferenciales se dividen en dos grupos:

- **Las ecuaciones diferenciales ordinarias**: son aquéllas en las que la función incógnita depende de una sola variable independiente, $y = y(x)$ y tienen la forma:
$$F(x, y, y', y'', \cdots) = 0.$$
- **Las ecuaciones en derivadas parciales**: son aquéllas en las que la función incógnita depende de varias variables; por tanto, relacionan la función, sus variables y las derivadas parciales de dicha función. Son de la forma (1.1).

Ejemplo 1.1. Veamos cuáles de las siguientes ecuaciones son ecuaciones diferenciales ordinarias y cuáles son ecuaciones en derivadas parciales.

(a) $\dfrac{dy}{dx} - 5y = 1.$

(b) $y'' + y - 2x = 0.$

(c) $(x + y)dx - 4ydy = 0.$

(d) $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}.$

(e) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\dfrac{\partial u}{\partial t}.$

Solución. Las ecuaciones diferenciales (a), (b) y (c) son ordinarias mientras que las ecuaciones dadas en (d) y (e) son ecuaciones en derivadas parciales. ■

Nos centraremos en el estudio de las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Ejercicios de la sección 1.2

1. Determina, en las siguientes ecuaciones diferenciales, la función incógnita, la variable independiente y los parámetros:

   (a) Modelo logístico de poblaciones: $\dfrac{dp}{dt} = \lambda p(\alpha - p).$

   (b) Ecuación de transferencia del calor: $\dfrac{dT}{dt} = \dfrac{1}{k}(A - T).$

   (c) Ecuación diferencial que modeliza vibraciones mecánicas y circuitos eléctricos: $x'' + bx' + kx = \gamma \sin(\omega t).$

1.3. Clasificación de las ecuaciones diferenciales

A continuación, clasificamos las ecuaciones diferenciales según el orden y según la linealidad.

Definición 1.2. Se llama **orden** de una ecuación diferencial al orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.

Ejemplo 1.2. Veamos qué orden tienen las ecuaciones diferenciales siguientes:

(a) $y'' - 5y' + 3y^3 = 0$.

(b) $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x$.

(c) $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$.

Solución.

(a) La ecuación diferencial $y'' - 5y' + 3y^3 = 0$ es de orden 2.

(b) La ecuación diferencial $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = x$ es de orden 3.

(c) Toda ecuación de la forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ es de orden 1. ■

Definición 1.3. Una ecuación diferencial es **lineal** si se puede expresar de la forma:

$$a_n(x)y^{n)} + a_{n-1}y^{n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$

donde $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x), g(x)$ dependen sólo de la variable x.

En caso contrario se dice que la ecuación diferencial es **no lineal**.

Nota 1.1. La linealidad de la ecuación diferencial sólo se exige para y y sus derivadas.

Dentro de las ecuaciones diferenciales lineales distinguimos:

- Ecuaciones diferenciales lineales con **coeficientes constantes**, cuando todos los coeficientes son constantes: $a_i(x) = cte$, $\forall i = 1, \cdots, n$.
- Ecuaciones diferenciales lineales con **coeficientes variables** si algún coeficiente es una función $a_i(x)$ que depende de x y no es constante.

Ejemplo 1.3. Clasifiquemos las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y'' - 2y' + y = 0$.

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3\dfrac{dy}{dx} = e^x$.

(c) $x^3y''' - x^2y'' + 3xy' + 5y = x$.

(d) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + (x+1)\dfrac{dy}{dx} + 2 = 0$.

(e) $e^x\, y'' + 2x\, y = 0$.

(f) $yy'' - 2y' = x$.

(g) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0$.

(h) $y''' + y^2 = \cos x$.

Solución. Las ecuaciones diferenciales (a) y (b) son lineales con coeficientes constantes. Las ecuaciones diferenciales (c), (d) y (e) son lineales con coeficientes variables. Las ecuaciones diferenciales (f), (g) y (h) son no lineales. ■

Si una ecuación diferencial de orden n dada en la forma:

$$F(x, y, y', \cdots, y^{n)}) = 0$$

puede expresarse de manera que la derivada de orden n aparezca despejada, es decir:

$$y^{n)} = G(x, y, y', \cdots, y^{n-1)}),$$

entonces esta expresión recibe el nombre **forma normal** de la ecuación diferencial.

■ **Nota 1.2.** Si al expresar la ecuación diferencial en forma normal aparecen cocientes, hay que tener en cuenta que las expresiones obtenidas son válidas donde tengan sentido.

⬢ **Ejemplo 1.4.** Escribamos en forma normal las ecuaciones diferenciales:

(a) $yy'' - 2y' = x$.

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0$.

(c) $y''' + y^2 = \cos x$.

Solución. Despejamos la derivada más alta en cada una de las ecuaciones diferenciales del ejemplo y obtenemos su forma normal:

(a) $yy'' - 2y' = x$, por tanto $\quad y'' = 2\dfrac{y'}{y} + \dfrac{x}{y}$.

(b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0$, por tanto $\quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = -\sin y$.

(c) $y''' + y^2 = \cos x$, por tanto $\quad y''' = -y^2 + \cos x$. ■

Ejercicios de la sección 1.3

1. Clasifica las siguientes ecuaciones diferenciales según el orden y la linealidad:

   (a) $(x^2 + e^{xy} + xy)dx + (y^2 + x)dy = 0$

   (b) $3x^2y'' + 5xy' - 8y = e^x \cos x$

   (c) $(x^2 + y^2)dx + (3e^x - 2y)dy = 0$

   (d) $\left(\dfrac{d^4y}{dx^4}\right) + \tan x \left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right) - e^x \dfrac{dy}{dx} - xy = e^{3x}$

(e) $4y^{VI} - 5y''' + 8y'' + 3yy' = \dfrac{x \ln x}{x+1}$

(Solución: (a) Orden 1, no lineal. (b) Orden 2, lineal. (c) Orden 1, no lineal. (d) Orden 4, lineal. (e) Orden 6, no lineal).

2. Escribe en forma normal las ecuaciones diferenciales del ejercicio anterior.

(Solución: (a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2+e^{xy}+xy}{y^2+x}$.
(b) $y'' = -\frac{5}{3x}y' + \frac{8}{3x^2}y + \frac{e^x \cos x}{3x^2}$.
(c) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2+y^2}{3e^x-2y}$.
(d) $\frac{d^4y}{dx^4} = -\tan x\frac{d^2y}{dx^2} + e^x\frac{dy}{dx} + x\,y + e^{3x}$.
(e) $y^{VI} = \frac{5}{4}y''' - 2y'' - \frac{3}{4}y\,y' + \frac{x\ln x}{4(x+1)}$).

3. Indica el orden de las siguientes ecuaciones diferenciales e indica si son lineales o no:

(a) $y' - y^3 = y'''$, (b) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^{30} = y^5$,

(c) $(x^3 + 7\cos y)\,dx - 8\ln x\,dy = 0$, (d) $\left(\dfrac{d^2x}{dt^2}\right)^3 = 3\dfrac{dx}{dt} - 4e^t$.

(Solución: (a) Orden 3, no lineal. (b) Orden 1, no lineal. (c) Orden 1, no lineal. (d) Orden 2, no lineal).

1.4. Soluciones de las ecuaciones diferenciales

Resolver una ecuación diferencial ordinaria, $F(x, y, y', y'', ...) = 0$, es hallar una expresión para la función $y(x)$ que satisfaga la relación de igualdad que determina dicha ecuación. Por tanto, la solución de una ecuación diferencial es una función.

■ **Definición 1.4.** Se llama **solución** de una ecuación diferencial ordinaria en un intervalo I a una función $\phi(x)$ definida en I que, sustituida en la ecuación junto con sus derivadas, la verifica en dicho intervalo, es decir:

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \cdots, \phi^{n)}(x)) = 0 \quad \forall x \in I.$$

⬢ **Ejemplo 1.5.** Comprobemos que la función $\phi(x) = e^{5x}$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria de primer orden $y' = 5y$.

Solución. Derivando $\phi(x) = e^{5x}$ respecto de x, se obtiene $\phi'(x) = 5e^{5x}$. Sustituyendo en la ecuación diferencial, vemos que verifica la ecuación diferencial:

$$\phi'(x) = 5e^{5x} = 5\,\phi(x). \blacksquare$$

⬢ **Ejemplo 1.6.** Comprobemos que la función $\phi(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$ es solución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden $y'' - \dfrac{2}{x^2}\,y = 0$.

Solución. Derivando dos veces la función $\phi(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$ respecto de x, se tiene:

$$\phi'(x) = 2x + \frac{1}{x^2}, \quad \phi''(x) = 2 - \frac{2}{x^3}.$$

Sustituyendo en la ecuación comprobamos que sí se verifica:

$$2 - \frac{2}{x^3} - \frac{2}{x^2}(x^2 - \frac{1}{x}) = 2 - \frac{2}{x^3} - 2 + \frac{2}{x^3} = 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Por tanto, $\phi(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$ es solución en el intervalo $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$. ■

⬣ **Ejemplo 1.7.** Veamos que toda función de la forma $\phi(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$ es solución de la ecuación diferencial $y'' - y' - 2y = 0$, para cualquier valor de las constantes C_1 y C_2.

Solución. Derivando dos veces $\phi(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{2x}$, tenemos:

$$\phi'(x) = -C_1e^{-x} + 2C_2e^{2x},$$

$$\phi''(x) = C_1e^{-x} + 4C_2e^{2x}$$

y sustituyendo, vemos que se verifica la ecuación diferencial:

$$C_1e^{-x} + 4C_2e^{2x} + C_1e^{-x} - 2C_2e^{2x} - 2C_1e^{-x} - 2C_2e^{2x} = 0,$$

$\forall x \in \mathbb{R}$. ■

⬣ **Ejemplo 1.8.** La ecuación diferencial $(y')^2 + 1 = 0$ no tiene solución real.

⬣ **Ejemplo 1.9.** Comprobemos que si derivamos implícitamente la relación $x^2 + y^2 = 4$ y sustituimos en la ecuación diferencial $y' = -\frac{x}{y}$, ésta se verifica.

Solución. Diferenciando la relación $x^2 + y^2 = 4$, tenemos:

$$2xdx + 2ydy = 0,$$

de donde se tiene que

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0.$$

Por tanto,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

y vemos que se verifica la ecuación diferencial. ■

Como se observa en los ejemplos, las soluciones de una ecuación diferencial pueden venir dadas como una función o una expresión que verifica la ecuación. Por ello, las llamamos **soluciones explícitas** si la solución es una expresión de la forma $y = y(x)$. Las llamamos **soluciones implícitas** si la solución es una expresión de la forma $g(x, y) = 0$.

En el caso de obtener soluciones implícitas hay que comprobar mediante el teorema de la función implícita que $g(x, y) = 0$ define a y como función de x.

Ejemplo 1.10. Veamos que $y^2 - x^3 + 8 = 0$ es solución implícita de la ecuación diferencial $y' = \dfrac{3x^2}{2y}$ en $]2, +\infty[$.

Solución. Derivando la expresión $y^2 - x^3 + 8 = 0$ respecto de la variable x se tiene $2yy' - 3x^2 = 0$, de donde despejamos y':

$$y' = \frac{3x^2}{2y}$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial, tenemos:

$$\frac{3x^2}{2y} = \frac{3x^2}{2y},$$

y esto se verifica $\forall x \in [2, +\infty[$, pues si despejamos y en la expresión de la solución implícita, $y = \pm\sqrt{x^3 - 8}$, vemos que está definida para $x \geq 2$. ■

Definición 1.5. La gráfica de una solución de una ecuación diferencial se denomina **curva integral** de la ecuación diferencial.

1.4.1. Clasificación de las soluciones

Cuando estudiamos cálculo integral resolvemos ecuaciones diferenciales muy simples del tipo $y' = f(x)$ cuya solución es $y = \int f(x)dx$.

Por ejemplo, para la ecuación diferencial de primer orden $y' = e^x$, integrando se obtiene la solución $y = e^x + C_1$.

Para la ecuación diferencial de segundo orden $y'' = e^x$, integrando se obtiene $y' = e^x + C_1$ y volviendo a integrar se obtiene la solución $y = e^x + C_1x + C_2$.

Para la ecuación diferencial de tercer orden $y''' = e^x$, integrando se obtiene $y'' = e^x + C_1$, volviendo a integrar se obtiene $y' = e^x + C_1x + C_2$ e integrando de nuevo, obtenemos la solución $y = e^x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3$, donde C_1, C_2 y C_3 son constantes arbitrarias.

Podríamos deducir que si una ecuación diferencial tiene solución, no tiene una sino infinitas soluciones. Además, podemos pensar que si es de primer orden, la solución contiene una constante arbitraria; si es de segundo orden contiene dos constantes arbitrarias y en general, si es de orden n la solución contiene n constantes arbitrarias.

Esto no siempre se cumple; por ejemplo la ecuación $(y')^2 + y^2 = 0$ tiene una única solución $y \equiv 0$. Pero en general encontraremos que la solución de una ecuación diferencial de orden n contiene n constantes arbitrarias, es decir, es una familia n-paramétrica de funciones.

Clasificamos las soluciones de una ecuación diferencial de la forma siguiente:

- **Familia n-paramétrica de soluciones:** es la solución de la ecuación diferencial que contiene n constantes arbitrarias.

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \quad \longrightarrow \quad g(x, y, C_1, \cdots, C_n) = 0.$$

- **Solución particular:** es una solución de la ecuación diferencial que no contiene constantes arbitrarias y que se obtiene dando valores numéricos a las constantes de la familia n-paramétrica de soluciones.

- **Solución singular:** es una solución de la ecuación diferencial que no contiene constantes arbitrarias y no está contenida en la familia n-paramétrica. No siempre existen; si existe, se trata de la curva llamada **envolvente** de la familia de curvas integrales definida por la familia n-paramétrica de soluciones.

- **Solución general** de una ecuación diferencial ordinaria de orden n: es la que contiene todas las soluciones de la ecuación. Está formada por la familia n-paramétrica de soluciones más las posibles soluciones singulares que tenga la ecuación.

Resolver una ecuación diferencial consiste en hallar la solución general. En el caso de las ecuaciones diferenciales lineales no existen soluciones singulares; por tanto, la solución general coincide con la familia n-paramétrica.

Ejemplo 1.11. Estudiemos los distintos tipos de soluciones que admite la ecuación diferencial $y' = \sqrt{y}$.
Solución. Esta ecuación es sencilla de resolver. Consideremos la ecuación escrita de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}$$

y separamos las variables:

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = dx.$$

Integrando a ambos lados:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int dx$$

se tiene:

$$2\sqrt{y} = x + C,$$

es decir,

$$\sqrt{y} = \frac{1}{2}(x + C).$$

La solución obtenida representa una familia 1-paramétrica de funciones definidas en $[-C, +\infty[$. Dando valores a C obtenemos soluciones particulares. Por ejemplo, para $C = 0$ obtenemos la solución particular $\sqrt{y} = \frac{x}{2}$ definida en $[0, +\infty[$.

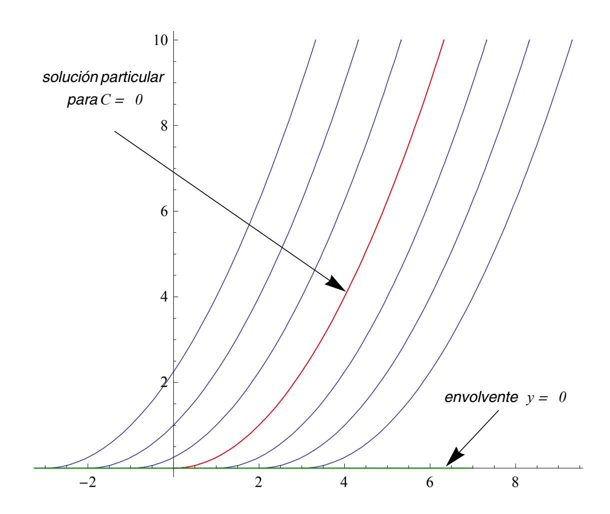


Figura 1.1: Gráficas de la familia 1-paramétrica de soluciones.

Observemos que la función $y = 0$ también es solución de esta ecuación diferencial ya que la verifica; sin embargo, no está incluida en la familia 1-paramétrica que hemos obtenido. Se trata de una solución singular.

La solución general de esta ecuación diferencial es:

$$\{\sqrt{y} = \frac{x + C}{2},\ C \in \mathbb{R}\} \cup \{y = 0\}. \ \blacksquare$$

Como ya se ha mencionado anteriormente, para hallar soluciones singulares se recurre al cálculo de la envolvente, veamos a continuación un método para obtenerla.

1.4.2. Cálculo de la envolvente de una familia

■ **Definición 1.6.** Se llama **envolvente** de una familia de curvas a una curva que es tangente a toda la familia y que en cada punto de la envolvente existe un único miembro de la familia tangente a ella.

⬢ **Ejemplo 1.12.** La solución singular $y = 0$ del Ejemplo 1.11, es una envolvente de la familia 1-paramétrica de soluciones, ya que es tangente a todas las curvas y en cada punto de la envolvente existe un único miembro de la familia tangente a ella (ver Figura 1.1).

■ **Teorema 1.1** (Condición suficiente de existencia de la envolvente)**.** Si $f(x,y,C)$ es una función dos veces diferenciable definida en un conjunto de valores x, y, C y si, para este conjunto de valores,

$$f(x,y,C)=0, \qquad \frac{\partial f(x,y,C)}{\partial C}=0 \tag{1.2}$$

y

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial C} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial C} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial C^2} \neq 0$$

entonces, la familia de curvas $f(x,y,C)=0$ tiene una envolvente cuyas ecuaciones paramétricas vienen dadas por (1.2).

Ejemplo 1.13. Calculemos la envolvente de la familia $(x-C)^2+y^2=4$.

Solución. Sea $f(x,y,C)=(x-C)^2+y^2-4$. Derivando respecto de C :

$$-2(x-C)=0 \to x-C=0$$

y sustituyendo en la ecuación de familia de curvas:

$$0+y^2=4 \to y=\pm 2,$$

obtenemos dos envolventes de esta familia de circunferencias, cuyas gráficas se muestran en la Figura 1.2 .

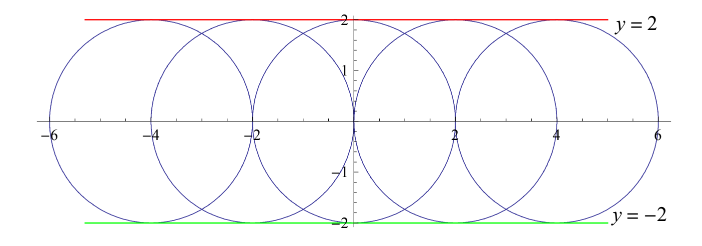


Figura 1.2: Familia 1-paramétrica de circunferencias y sus envolventes.

■

Ejemplo 1.14. Calculemos la envolvente de la familia $y=Cx^2+1$.

Solución. Derivando $y=Cx^2+1$ respecto de C tenemos $x^2=0$, y sustituyendo en la ecuación de la familia, se tiene que $y=0+1$; por tanto, $y=1$. Pero podemos observar que no se trata de una envolvente de la familia de curvas, sino de una de ellas, correspondiente al valor $C=0$.

Por otra parte, si dibujamos las gráficas de esta familia de parábolas y de $y=1$, vemos que, efectivamente, no se trata de una envolvente, pues en cada

punto de ella no hay un miembro de la familia tangente a ella y además, en el punto $(0,1)$ hay más de un miembro de la familia tangente a ella (ver Figura 1.3).

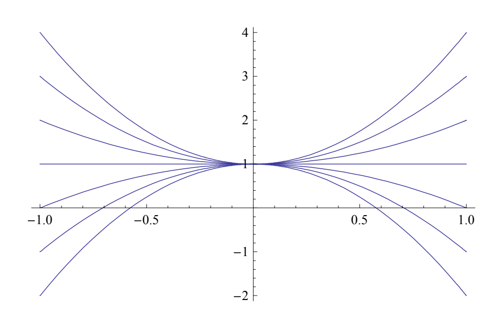


Figura 1.3: Familia 1-paramétrica de parábolas.

■

Ejercicios de la sección 1.4

1. Comprueba si las siguientes funciones o relaciones son solución de la ecuación diferencial dada:

   (a) La función $\phi(x) = e^x$ es solución de $y'' - y = 0$ en $]-\infty, +\infty[$.

   (b) La función $y = \dfrac{x^4}{16}$ solución de $y' - xy^{\frac{1}{2}} = 0$ en $]-\infty, +\infty[$.

   (c) Las funciones $\phi_1(x) = \sin 2x$ y $\phi_2(x) = \cos 2x$ son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + 4y = 0$.

   (d) La relación $x + y + e^{xy} = 0$ es solución implícita de $(1 + xe^{xy})y' + 1 + ye^{xy} = 0$.

   (Solución: (a) Sí. (b) Sí. (c) ϕ_1: sí, ϕ_2: sí. (d) Sí).

2. Verifica si las siguientes funciones o expresiones son solución de la ecuación diferencial dada, indicando si son solución implícita o explícita:

   (a) La funciones $\phi_1(x) = \cos 2x$ y $\phi_2(x) = -4\cos x$, para la ecuación $y'' + 4y = 0$.

   (b) La función $\phi(x) = \dfrac{x}{8} + \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln^2 x}{x}$, para la ecuación diferencial $x^3y''' + 6x^2y'' + 7xy' + y = x$.

   (c) La función $\phi(x) = \sqrt{\dfrac{3}{8}\,x^2 + \dfrac{1}{x^2}}$, para la ecuación diferencial $(3x^2 - 4y^2)dx - 4xydy = 0$.

   (d) La relación $x^2 - 2y^2 = 3$, para la ecuación $x - 2yy' = 0$.

(e) Las relaciones $x + 2y - e^{xy} = 1$ y $2x - 2y - e^{xy} = 0$ para la ecuación $(1 - ye^{xy}) + (2 - xe^{xy)}y' = 0$.

(Solución: (a) ϕ_1 : sí. ϕ_2 : no. (b) Sí. (c) Sí. (d) Sí. (e) La primera sí, la segunda no).

3. Estudia si existe solución singular de las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $y' = \dfrac{2y}{x}$,

   (b) $y' = -2y^{\frac{3}{2}}$.

   (Solución: (a) $y = 0$ es solución particular. (b) $y = 0$ es solución singular).

4. Sustituye $y = e^{rx}$ en la ecuación diferencial $5y'' = 3y$ y determina todos los valores de r para los que $\phi(x) = e^{rx}$ es solución de dicha ecuación.

   (Solución: $r = \pm\sqrt{3/5}$).

5. (a) Determina si la relación $y - 3\ln(y+4) = x^2 + C$, es solución implícita de la ecuación diferencial,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x(y+4)}{y+1}.$$

   (b) Comprueba que $y = -4$ es solución de dicha ecuación diferencial e indica de qué tipo es.

   (c) Determina el valor de C para que $y(1) = -3$.

   (Solución: (a) Sí. (b) Solución singular. (c) $C = -4$).

6. La expresión $y(x) = \dfrac{1}{C - 3x}$ define una familia 1-paramétrica de soluciones de la ecuación diferencial $y' = 3y^2$. ¿Hay algún valor de C para el que $y(0) = 0$?

   (Solución: No).

7. Dada la ecuación diferencial $3(y''')^4 + y^2 = 0$, ¿existe alguna familia 2-paramétrica de soluciones de dicha ecuación? ¿Tiene alguna solución?

   (Solución: No; Sí: $y(x) = 0$).

1.5. El problema de valor inicial

Supongamos que tenemos un problema consistente en resolver una ecuación diferencial, pero además tenemos una condición que nos indica el valor y_0 que ha de tomar la variable dependiente para un determinado valor x_0 de la variable independiente.

■ **Definición 1.7.** Un problema **problema de valor inicial** o **problema de Cauchy** para una ecuación de primer orden es un problema de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

La condición adicional $y(x_0) = y_0$ recibe el nombre de **condición inicial**.

Para resolver un problema de valor inicial tenemos que hallar una solución particular de la ecuación diferencial; precisamente la que *pasa* por el punto (x_0, y_0); es decir, aquélla solución que al sustituir el valor x_0 se obtiene y_0.

La condición inicial nos permite calcular la constante que aparece en la familia 1-paramétrica, obteniendo la solución particular que nos interesa.

⬢ **Ejemplo 1.15.** Resolvamos el problema de valor inicial:

$$y' = y, \quad y(0) = 3.$$

Solución. Hemos visto que $y = Ce^x$ es una familia uniparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $y' = y$ en $]-\infty, +\infty[$. Buscamos la solución particular cuya curva integral pasa por el punto $(0, 3)$ (ver Figura 1.4).

Una vez hallada la familia $y = Ce^x$, sustituimos la condición inicial:

$$3 = Ce^0$$

obteniendo el correspondiente valor de C:

$$C = 3,$$

luego la solución particular buscada es:

$$y = 3\,e^x.$$

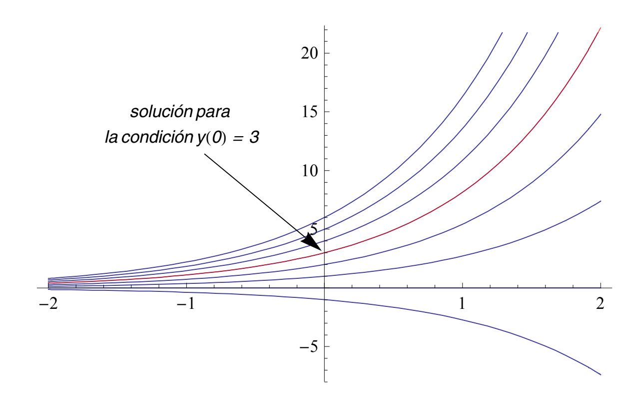


Figura 1.4: Solución del problema de valor inicial.

■

En general, si tenemos una ecuación diferencial de orden n, necesitaremos n condiciones, $y(x_0), y'(x_0), \cdots, y^{n)}(x_0)$, para poder determinar las n constantes arbitrarias que aparecen en la solución.

■ **Definición 1.8.** Un **problema de valor inicial** de una ecuación diferencial de orden n

$$F\left(x, \phi(x), \phi'(x), ..., \phi^{n)}(x)\right) = 0$$

consiste en encontrar una solución en el intervalo I de $\mathbb{R}$ tal que para cada $x_0 \in I$ satisfaga la condición inicial

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_1, \; ..., \; y^{n)}(x_0) = y_n,$$

donde y_0, $y_1, ..., y_n$ son constantes dadas.

⬣ **Ejemplo 1.16.** Demostremos que la función $\phi(x) = \sin x - \cos x$ es solución del problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} y'' + y = 0, \quad y(0) &= -1 \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

Solución. Tenemos que:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \sin x - \cos x \\ \phi'(x) &= \cos x + \sin x \\ \phi''(x) &= -\sin x + \cos x, \end{aligned}$$

sustituyendo en la ecuación diferencial comprobamos que ésta se verifica:

$$-\sin x + \cos x + \sin x - \cos x = 0;$$

por tanto, $\phi(x)$ es solución de la ecuación diferencial. Pero además:

$$\phi(0) = \sin 0 - \cos 0 = -1$$

y

$$\phi'(0) = \cos 0 + \sin 0 = 1;$$

por tanto, se verifican las condiciones iniciales dadas. ■

Ejercicios de la sección 1.5

1. Verifica que $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ es solución del problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} y'' - 4y = 12x, \quad y(0) &= 4 \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

2. Comprueba que la función $\phi(x) = \frac{1}{4}\sin 4x$ es solución del problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} y'' + 16y = 0, \quad y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 1. \end{aligned}$$

1.6. Existencia y unicidad de soluciones

Ante un problema de valor inicial surgen dos cuestiones fundamentales, ¿existe solución al problema?, ¿es única? Antes de resolver un problema es interesante saber si tiene solución y si es única, especialmente si vamos a recurrir a métodos numéricos. Geométricamente, equivale a preguntarse si de toda la familia de curvas integrales existe alguna que pase por el punto definido por la condición inicial y si por dicho punto pasa una única curva.

Ejemplo 1.17. Veamos que el problema de valor inicial

$$y' - \sqrt{y} = 0, \; y(0) = 0,$$

tiene dos soluciones.

Solución. Este problema admite la solución particular $y = \frac{x^2}{4}$ y la solución singular $y = 0$, es decir, hay dos curvas integrales pasando por $(0,0)$ (ver Ejemplo 1.11). ■

Las respuestas a estas preguntas nos las dan los teoremas de existencia y unicidad.

Teorema 1.2 (De existencia y unicidad)**.** Dado el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

si f y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son funciones continuas en un rectángulo $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b,$ $c \leq x \leq d\}$ que contiene al punto (x_0, y_0) en su interior, entonces existe un intervalo I con centro en x_0, $I =]x_0 - h, x_0 + h[$, $h > 0$, y una única función $\phi(x)$ definida en I que satisface el problema.

Observamos que la existencia y unicidad de la solución se asegura sólo en un entorno de x_0 (ver Figura 1.5).

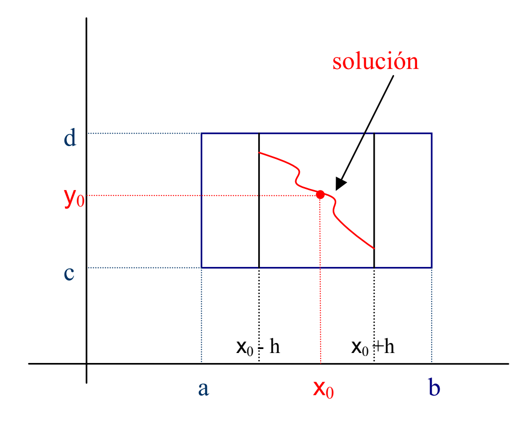


Figura 1.5: Intervalo de existencia de la solución del problema de valor inicial.

Poder asegurar la existencia de una solución no implica que seamos capaces de hallarla, aunque sí es importante conocer su existencia y unicidad; en particular, si vamos a utilizar métodos de aproximación o realizar estudios cualitativos.

⬢ **Ejemplo 1.18.** Comprobemos que el problema del Ejemplo 1.17 no satisface las condiciones del teorema.

Solución. Hemos visto que la solución general de esta ecuación estaba formada por una familia 1-paramétrica de soluciones y una solución singular $y = 0$. Si dibujamos las curvas integrales, vemos que por el punto $(0, 0)$ pasan dos curvas solución, por tanto no hay unicidad. Veamos que, efectivamente, no se verifica el teorema de existencia y unicidad para $(x_0, y_0) = (0, 0)$:

$$y' = \sqrt{y}, \text{ es decir, } f(x, y) = \sqrt{y} = y^{1/2}, \text{ y derivando: } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}.$$

Las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en el semiplano $y > 0$, pero no son continuas en un rectángulo que contenga a $(0, 0)$.

En cambio, sí podríamos asegurar que $\forall (x_0, y_0)$ con $y_0 > 0$, existe un intervalo centrado en x_0 en el que el problema dado tiene solución única. ■

⬢ **Ejemplo 1.19.** Dado el problema de valor inicial

$$y' = y, \quad y(0) = 3,$$

¿existe solución única?

Solución. Tenemos que $f(x, y) = y$ y $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ son funciones continuas en $\mathbb{R}^2$, por tanto son continuas en un entorno de $(0, 3)$, podemos por ello asegurar que existe un entorno de $x_0 = 0$ donde existe solución y es única (de hecho, vimos que era $y = 3e^x$). ■

Ejercicios de la sección 1.6

1. Dado el problema de valor inicial

$$y' = x^2 - xy^3, \quad y(1) = 6,$$

estudia la existencia y unicidad de su solución.

2. Determina si se verifica el teorema de existencia y unicidad en los siguientes casos:

(a) $y' = x\sqrt{y}, \quad y(0) = 0.$

(b) $y' = x\sqrt{y}, \quad y(1) = 1.$

(c) $y' = (x - y)^{1/2}, \; y(2) = 2.$

(d) $y' = \dfrac{2x}{y - 1}, \quad y(1) = 0.$

(e) $y' = x^2 + y^2 - xy,\ y(0) = 2.$

(Solución: (a) No. (b) Sí. (c) No. (d) Sí. (e) Sí).

3. Demuestra que en el intervalo $0 \leq x \leq \pi$, las funciones $y_1(x) = 2$ e $y_2(x) = 2\cos x$ satisfacen el problema de valor inicial

$$y' + (4 - y^2)^{1/2} = 0, \qquad y(0) = 2.$$

(Sugerencia: Comprobar que no se verifican las hipótesis del teorema de existencia y unicidad).

TEMA 2

Ecuaciones diferenciales de primer orden

En este tema nos vamos a centrar en el estudio de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Resolver analíticamente las ecuaciones diferenciales no siempre es posible, pero en el caso de las ecuaciones de primer orden, existen métodos para resolver ciertos tipos de ecuaciones que presentan determinadas características o propiedades. Estudiaremos algunos de los más habituales. También veremos la modelización y resolución de problemas reales donde surgen ecuaciones diferenciales de primer orden.

Los objetivos de este tema son:

- Distinguir de qué tipo es una ecuación diferencial de primer orden.
- Aplicar métodos de resolución para las ecuaciones diferenciales de primer orden de variables separables, exactas, lineales, ecuaciones de Bernoulli, homogéneas y ecuaciones con coeficientes lineales.
- Modelizar y resolver problemas provenientes de fenómenos reales donde aparecen ecuaciones diferenciales de primer orden.

2.1. Introducción

La resolución de ecuaciones diferenciales en términos de funciones analíticas no es inmediata, especialmente si no son lineales. Sin embargo, en el caso de las ecuaciones de primer orden existen ciertos tipos especiales de ecuaciones que admiten métodos sencillos para resolverlas.

Dada una ecuación diferencial, tendremos que distinguir de qué tipo de ecuación se trata y saber cuál es el método que nos va a permitir resolverla. Para ello, veamos cuáles son las distintas formas en que se nos puede presentar una ecuación diferencial de primer orden:

Forma general:

$$F(x, y, y') = 0.$$

Forma normal:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Forma diferencial:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0.$$

Como métodos básicos de resolución estudiaremos los que nos permiten resolver las ecuaciones de *variables separables* y las *diferenciales exactas*.

Mediante sustituciones o transformaciones de variables, ciertos tipos de ecuaciones diferenciales pueden reducirse a los anteriores. Estas ecuaciones son las *ecuaciones homogéneas*, las *ecuaciones con coeficientes lineales* (reducibles a homogéneas) y las *ecuaciones de Bernouilli*.

2.2. Ecuaciones separables

■ **Definición 2.1.** Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y),$$

es una **ecuación separable o de variables separables** si $f(x,y)$ se puede expresar como el producto de una función de x por una función de y, esto es:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)q(y). \tag{2.1}$$

■ **Definición 2.2.** Una ecuación diferencial de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

es una **ecuación separable o de variables separables** si se puede escribir de la forma:

$$f(x)g(y)\ dx + h(x)k(y)\ dy = 0. \tag{2.2}$$

Método de resolución

Si la ecuación diferencial presenta la forma (2.1), separamos las variables x e y, aislándolas en miembros opuestos de la ecuación. Para ello, hemos de suponer que $q(y) \neq 0$, en ese caso:

$$\frac{1}{q(y)}dy = p(x)dx.$$

Integrando ahora ambas partes de la igualdad,

$$\int \frac{1}{q(y)}dy = \int p(x)dx$$

obtenemos la solución implícita formada por una familia 1-paramétrica de soluciones:

$$F(y) = G(x) + C.$$

Si $q(y) = 0$ es solución de la ecuación diferencial, la añadiremos a la familia 1-paramétrica para obtener la solución general de la ecuación diferencial, a menos que ya esté incluida en ella.

Si la ecuación diferencial presenta la forma (2.2), dividimos la ecuación por $g(y)h(x)$, obteniendo:

$$\frac{f(x)}{h(x)}dx + \frac{k(y)}{g(y)}dy = 0$$

y por tanto, la ecuación queda de la forma:

$$n(x)\ dx + m(y)\ dy = 0.$$

A continuación separamos las variables:

$$m(y)dy = -n(x)dx$$

e integramos ambos lados de la igualdad:

$$\int m(y)dy = \int -n(x)dx$$

obteniendo la solución implícita:

$$F(y) = G(x) + C.$$

Observemos que la solución obtenida no está definida para los valores de x tales que $h(x) = 0$.

Si $g(y) = 0$ es solución de la ecuación diferencial, la añadiremos a ésta para obtener la solución general de la ecuación diferencial.

■ **Nota 2.1.** Como hemos visto, en el proceso de resolución se pueden perder soluciones con las manipulaciones algebraicas. Por ello, hay que comprobar si alguna de ellas es o no solución, y en caso de serlo, añadirla para obtener la solución general.

⬢ **Ejemplo 2.1.** Comprobemos si las siguientes ecuaciones diferenciales son separables:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + x^2y^3.$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + xy}{y^2 + 1}.$

(c) $y' = 2 - xy.$

(d) $\cos x\, e^y\, dx + (x + 1)\, dy = 0.$

Solución.

(a) Esta ecuación la podemos reescribir como

$$\frac{dy}{dx} = x^2\ (1 + y^3),$$

luego sí es una ecuación separable.

(b) Esta ecuación la podemos reescribir como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(3-y)}{y^2+1};$$

por tanto, el término de la derecha se puede escribir como el producto de una función de x por una función de y:

$$\frac{dy}{dx} = x\,\frac{3-y}{y^2+1},$$

luego sí es una ecuación separable.

(c) En la ecuación

$$y' = 2 - xy$$

no podemos separar la expresión $2 - xy$ como producto de una función de x por una de y; por tanto, no es una ecuación separable.

(d) Esta ecuación es de la forma:

$$\underbrace{\cos x}_{f(x)}\,\underbrace{e^y}_{g(y)}\,dx + \underbrace{(x+1)}_{h(x)}\,dy = 0,$$

luego sí es una ecuación separable. ■

Ejemplo 2.2. Resolvamos las siguientes ecuaciones diferenciales separables:

(a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+2}{y^4}$.

(b) $y = \frac{1}{4}y'x - 1$.

(c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-2}{2x+3}$, con la condición inicial $y(-1) = 0$.

Solución.

(a) Separando las variables, tenemos:

$$y^4 dy = (x+2)dx$$

e integrando ambos lados,

$$\int y^4 dy = \int (x+2)dx$$

obtenemos la solución general implícita:

$$\frac{y^5}{5} = \frac{x^2}{2} + 2x + C_1.$$

Despejando y, y haciendo $5C_1 = C$, obtenemos la solución explícita:

$$y = \sqrt[5]{\frac{5x^2}{2} + 10x + C}.$$

(b) Reescribimos la ecuación separando las variables:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{4}\frac{dy}{dx}x - 1, \\ 4(y+1) &= \frac{dy}{dx}\,x, \\ \frac{1}{y+1}dy &= \frac{4}{x}\,dx. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Al dividir por $y+1$, estamos asumiendo que $y+1 \neq 0$, por ello, es posible que se haya perdido la solución $y = -1$. Comprobemos si $y = -1$ es solución de la ecuación diferencial; para ello, la sustituimos en la ecuación (2.3) y se tiene la identidad:

$$-1 = 0 - 1$$

Puesto que se verifica la ecuación, sí es solución. Añadiremos esta solución a la familia 1-paramétrica que obtengamos.

Integrando ahora ambos lados de (2.3), se tiene:

$$\ln|y+1| = 4\ln|x| + C_1,$$
$$|y+1| = e^{4\ln|x|}e^{C_1},$$

o equivalentemente:

$$|y+1| = x^4\,C_2, \quad \text{donde } C_2 = e^{C_1} > 0;$$

por tanto,

$$y + 1 = \pm C_2 x^4,$$

o equivalentemente:

$$y + 1 = Cx^4, \quad \text{donde } C = \pm C_2 \neq 0,$$

de donde se obtiene:

$$y = Cx^4 - 1, \quad \text{con } C \neq 0.$$

Como la solución $y = -1$ que falta añadir corresponde al caso $C = 0$, podemos expresar la solución general de la forma:

$$y = Cx^4 - 1, \quad \forall C \in \mathbb{R}.$$

(c) Reescribimos la ecuación separando las variables:

$$\frac{dy}{y-2} = \frac{dx}{2x+3} \tag{2.4}$$

Observamos que $y = 2$ es solución de la ecuación diferencial, por ello, deberíamos tenerla en cuenta, aunque en este caso, no es la solución particular que buscamos ya que no verifica la condición inicial dada.

Integrando ambos lados de (2.4), se tiene:

$$\ln|y-2| = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C_1. \tag{2.5}$$

Podemos considerar ahora la condición inicial, obtener C_1 y despejar y. También se puede despejar explícitamente y manteniendo C_1 y aplicar luego la condición inicial para hallar C_1 y obtener así la solución del problema de valor inicial.

En el primer caso, como $y(-1) = 0$, tenemos:

$$\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 1 + C_1, \text{ luego } C_1 = \ln 2$$

y sustituyendo el valor de C_1 en (2.5) se tiene:

$$\ln|y-2| = \frac{1}{2}\ln|2x+3| + \ln 2.$$

Puesto que buscamos una solución verificando $y(-1) = 0$, los valores de x e y que nos interesan son cercanos a estos valores, por tanto:

$$\ln(2-y) = \frac{1}{2}\ln(2x+3) + \ln 2,$$

$$\ln(2-y) = \ln(2(2x+3)^{1/2}),$$

$$(2-y) = 2\sqrt{2x+3}.$$

Luego la solución del problema de valor inicial es:

$$y = 2 - 2\sqrt{2x+3}. \ \blacksquare$$

Ejercicios de la sección 2.2

1. Obtén la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales separables:

   (a) $\dfrac{\tan y}{\cot x}\,dx + \sec x\,dy = 0.$

   (b) $(x + xy^2)\,dx + e^{x^2} y\,dy = 0.$

   (c) $y' = \dfrac{6x^2 + 2x - 5}{\cos y + e^y}.$

   (d) $e^{-y}x^2 + (x^2+2)\,y\,y' = 0.$

   (Solución: (a) $y = \arcsin(Ce^{\cos x})$.
   (b) $y^2 = Ce^{e^{-x^2}} - 1$.
   (c) Solución implícita dada por: $\sin y + e^y = 2x^3 + x^2 - 5x + C$.
   (d) $e^y(1-y) = x - \sqrt{2}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C$).

2. Resuelve el siguiente problema de valor inicial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y\,(2x^2+1)}{x}, \qquad y(1) = 1.$$

   (Solución: $y = xe^{(x^2-1)}$).

2.3. Ecuaciones diferenciales exactas

Dada una familia de curvas $F(x, y) = C$, se puede generar una ecuación diferencial de primer orden hallando la diferencial total de F:

$$dF(x, y) = 0,$$

es decir:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0.$$

El método en que se basa la resolución de las ecuaciones exactas es el proceso inverso. Es decir, dada una ecuación diferencial en la forma:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

intentamos ver si corresponde a la diferencial total de alguna función de dos variables.

■ **Definición 2.3.** Una ecuación diferencial de primer orden

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.6}$$

es **exacta** en un rectángulo R si $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ es una diferencial exacta, es decir, si existe una función $F(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y), \quad \forall (x, y) \in R.$$

El siguiente teorema nos da una condición necesaria y suficiente para conocer cuándo una ecuación es exacta y su demostración nos proporciona un método para obtener la solución general $F(x, y) = C$.

■ **Teorema 2.1.** Sean $M(x, y)$ y $N(x, y)$ funciones continuas con derivadas parciales de primer orden continuas en un rectángulo R. Entonces, la ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

es exacta si y sólo si se verifica:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in R. \tag{2.7}$$

Demostración.

($\Longrightarrow$) Supongamos que la ecuación $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta. Entonces, existe una función $F(x, y)$ tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = M(x, y) \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = N(x, y);$$

por tanto:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}.$$

Puesto que las primeras derivadas parciales de M y N son continuas en R, también lo son las derivadas parciales segundas cruzadas de F; por tanto, éstas son iguales y se tiene que:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \quad \forall (x,y) \in R.$$

($\Longleftarrow$) Dada la ecuación $M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0$, vamos a demostrar que si se verifica (2.1), existe una función F verificando las condiciones de la definición de ecuación exacta.

Si $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$, entonces:

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx = G(x,y) + \varphi(y) \tag{2.8}$$

donde $G(x,y)$ es una primitiva de $M(x,y)$ respecto de x. Ahora, derivamos parcialmente respecto de y la expresión obtenida para F y la igualamos a $N(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) + \varphi'(y) = N(x,y),$$

de donde despejamos $\varphi'(y)$:

$$\varphi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial G}{\partial y}(x,y). \tag{2.9}$$

Si esta expresión sólo depende de y, podremos integrar y obtener $\varphi(y)$ que, sustituida en (2.8) nos dará la expresión de $F(x,y)$.

Queda por demostrar que (2.9) sólo depende de y. Para ello, comprobamos que su derivada parcial respecto de x es cero:

$$\frac{\partial}{\partial x}(N(x,y) - \frac{\partial G}{\partial y}(x,y)) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0. \blacksquare$$

Método de resolución

Si la ecuación (2.6) es exacta, existe una función F de modo que:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = dF(x,y);$$

por tanto, la ecuación queda:

$$dF(x,y) = 0$$

y la solución es:

$$F(x,y) = C,$$

donde $F(x,y)$ se obtiene siguiendo los pasos vistos en la demostración del Teorema 2.1 y C es una constante arbitraria.

Dicha solución corresponde a la solución general de la ecuación diferencial, ya que esta familia no tiene envolvente (ver Ejercicio 1 de la sección 2.3).

Ejemplo 2.3. Resolvamos las siguientes ecuaciones diferenciales exactas:

(a) $(x^2+y^2+2x)dx+(2xy+3y^2)dy=0$.

(b) $(\cos x \sin x - xy^2)dx + y(1-x^2)dy = 0$, $y(0)=2$.

Solución.

(a) Comprobamos en primer que es exacta:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2+2x) = 2y = \frac{\partial}{\partial x}(2xy+3y^2).$$

Por tanto, la solución general viene dada por $F(x,y)=C$, siendo F una función tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^2+y^2+2x \tag{2.10}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy+3y^2. \tag{2.11}$$

Calculemos $F(x,y)$. Integrando la ecuación (2.10) respecto de x tenemos:

$$F(x,y) = \int (x^2+y^2+2x)dx = \frac{x^3}{3}+y^2x+x^2+\varphi(y).$$

Derivando esta expresión respecto de y, se tiene que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2xy+\varphi'(y).$$

Igualamos esta ecuación a la ecuación (2.11):

$$2x\,y+\varphi'(y) = 2xy+3y^2$$

y despejamos $\varphi'(y)$:

$$\varphi'(y) = 3y^2,$$

por tanto:

$$\varphi(y) = \int 3y^2dy = y^3+k.$$

Podemos tomar $k=0$, ya que en la solución final de la ecuación diferencial esta constante quedará englobada en la constante C. Por tanto, la función F buscada es:

$$F(x,y) = \frac{x^3}{3}+y^2x+x^2+y^3$$

y la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\frac{x^3}{3}+y^2x+x^2+y^3 = C.$$

(b) Comprobemos que es exacta:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\cos x \sin x - xy^2) = -2xy = \frac{\partial}{\partial x}(y(1-x^2)).$$

Por tanto, la solución general viene dada por $F(x,y) = C$, siendo F una función tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \cos x \sin x - xy^2 \qquad (2.12)$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y(1-x^2). \qquad (2.13)$$

En este caso, es más sencillo comenzar integrando la ecuación (2.13) respecto de y:

$$F(x,y) = \int y(1-x^2)dy = \frac{(1-x^2)y^2}{2} + \psi(x).$$

Derivamos ahora esta expresión respecto de x y tenemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -xy^2 + \psi'(x).$$

Igualando esta ecuación a la ecuación (2.12) se tiene:

$$-xy^2 + \psi'(x) = \cos x \sin x - xy^2,$$

de donde $\psi'(x) = \cos x \sin x$ y $\psi(x) = \frac{\sin^2 x}{2}$.
Por tanto,

$$F(x,y) = \frac{(1-x^2)y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{2}$$

y la solución general de la ecuación diferencial es:

$$\frac{(1-x^2)y^2}{2} + \frac{\sin^2 x}{2} = C$$

o bien,

$$(1-x^2)y^2 + \sin^2 x = C_1.$$

Imponiendo la condición inicial, $y(0) = 2$, se tiene que $4 = C_1$ y sustituyendo este valor de C_1, obtenemos la solución del problema de valor inicial dado:

$$(1-x^2)y^2 + \sin^2 x = 4$$

o bien,

$$y^2 = \frac{4 - \sin^2 x}{(1-x^2)}. \blacksquare$$

2.3.1. Factores integrantes

Dada una ecuación diferencial de la forma

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.14}$$

que no es exacta, a veces es posible encontrar una función $\mu(x,y)$ tal que al multiplicarla por la ecuación diferencial, ésta se convierta en exacta. Es decir,

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

es una ecuación diferencial exacta.

⬢ **Ejemplo 2.4.** Demostremos que la ecuación diferencial

$$(2e^y + 3x\sin y)dx + (xe^y + x^2\cos y)dy = 0$$

no es exacta, pero si multiplicamos toda la ecuación por x se obtiene una ecuación diferencial exacta.

Solución. Esta ecuación no es exacta ya que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(2e^y + 3x\sin y) = 2e^y + 3x\cos y \neq \frac{\partial}{\partial x}(xe^y + x^2\cos y) = e^y + 2x\cos y.$$

Si multiplicamos la ecuación por x, nos queda la ecuación diferencial:

$$(2xe^y + 3x^2\sin y)dx + (x^2e^y + x^3\cos y)dy = 0$$

que sí es diferencial exacta ya que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(2xe^y + 3x^2\sin y) = 2xe^y + 3x^2\cos y = \frac{\partial}{\partial x}(x^2\ e^y + x^3\cos y). \blacksquare$$

Al factor $\mu(x,y)$ tal que, al multiplicar una ecuación diferencial por dicho factor, ésta se convierte en exacta, se le llama **factor integrante**.

■ **Nota 2.2.** Ambas ecuaciones tienen esencialmente las mismas soluciones, pero al multiplicar por el factor integrante $\mu(x,y)$ es posible ganar o perder soluciones.

En el siguiente ejemplo vemos cómo determinar si hemos ganado o perdido alguna solución en el proceso.

⬢ **Ejemplo 2.5.** Vamos a comprobar que $\mu(x,y) = xy^2$ es factor integrante de la ecuación:

$$(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0 \tag{2.15}$$

y a continuación la resolveremos.

Solución. Al multiplicar (2.15) por xy^2 obtenemos:

$$(2xy^3 - 6x^2y^2)dx + (3x^2y^2 - 4x^3y)dy = 0, \tag{2.16}$$

que sí es exacta.

Resolvamos la ecuación (2.16). Su solución será $F(x, y) = C$, siendo F una función tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2xy^3 - 6x^2y^2 \tag{2.17}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4x^3y. \tag{2.18}$$

Integrando (2.17) respecto de x se tiene que

$$F(x, y) = \int (2xy^3 - 6x^2y^2)dx = x^2y^3 - 2x^3y^2 + \varphi(y).$$

Derivando esta expresión respecto de y, tenemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2y^2 - 4x^3y + \varphi'(y).$$

Igualamos esta ecuación y la ecuación (2.18):

$$3x^2y^2 - 4x^3y + \varphi'(y) = 3x^2y^2 - 4x^3y,$$

despejamos $\varphi'(y)$:

$$\varphi'(y) = 0$$

y obtenemos $\varphi(y)$:

$$\varphi(y) = 0.$$

Por tanto,

$$F(x, y) = x^2y^3 - 2x^3y^2$$

y la solución general de la ecuación diferencial (2.16) es:

$$x^2y^3 - 2x^3y^2 = C.$$

Como se ha comentado, al multiplicar (2.15) por el factor integrante $\mu(x, y)$ es posible ganar o perder soluciones. En este caso, al multiplicar la ecuación (2.15) por xy^2, se ha obtenido $y \equiv 0$ como solución de (2.16) pero no lo es de (2.15). ■

Cálculo de factores integrantes

Hemos visto que $\mu(x, y)$ es un factor integrante de (2.14) si la ecuación

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0$$

es exacta. Por tanto, se verificará:

$$\frac{\partial(\mu(x, y)M(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(\mu(x, y)N(x, y))}{\partial x}.$$

Derivando se tiene:

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x},$$

es decir:

$$(M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x}) = (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})\mu. \tag{2.19}$$

Obtener μ de esta ecuación no es sencillo puesto que a veces llegamos a una ecuación en derivadas parciales cuya resolución es más complicada que la ecuación inicial. Sin embargo, esta ecuación se simplifica si buscamos un factor de la forma $\mu(x)$, es decir μ sólo depende de la variable x, o de la forma $\mu(y)$, es decir que sólo depende de y.

- **Factor integrante de la forma $\mu(x)$:**

  Supongamos que queremos hallar un factor integrante que sólo dependa de x. Entonces la ecuación (2.19) queda:

  $$-N\mu'(x) = (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})\mu(x).$$

  Por tanto,

  $$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}.$$

  Si la expresión de la derecha sólo depende de x y es continua, entonces existe el factor integrante $\mu(x)$ y se obtiene integrando esta ecuación, es decir:

  $$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}.$$

- **Factor integrante de la forma $\mu(y)$:**

  Si buscamos un factor integrante que sólo dependa de y, entonces la ecuación (2.19) queda:

  $$M\mu'(y) = (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})\mu(y).$$

  Por tanto:

  $$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}.$$

  Si la expresión de la derecha sólo depende de y y es continua, entonces existe el factor integrante $\mu(y)$ y se obtiene integrando:

  $$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

Método de resolución

Dada la ecuación

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0,$$

se calcula $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial N}{\partial x}$, entonces:

- Si $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, la ecuación no es exacta y buscamos un factor integrante.
- Si $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ depende sólo de x, entonces un factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx}.$$

- Si $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ depende sólo de y, entonces un factor integrante es:

$$\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}.$$

- Si encontramos un factor integrante, se multiplica toda la ecuación diferencial por dicho factor y, puesto que la ecuación obtenida es exacta, se resuelve hallando la solución $F(x,y) = C$.
- Se comprueba si al multiplicar por el factor integrante aparecen o se pierden soluciones.

Ejemplo 2.6. Resolvamos las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$.

(b) $y(x + y + 1)dx + x(x + 3y + 2)dy = 0$.

Solución.

(a) Esta ecuación no es exacta ya que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(2x^2 + y) = 1 \neq \frac{\partial}{\partial x}(x^2y - x) = 2xy - 1.$$

En este caso:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1 - (2xy - 1)}{x^2y - x} = \frac{-2xy + 2}{-x(1 - xy)} = \frac{2(1 - xy)}{-x(1 - xy)} = -\frac{2}{x};$$

por tanto, sí existe un factor de la forma $\mu(x)$, dado por:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x} dx},$$

de donde:

$$\mu(x) = x^{-2}.$$

Multiplicamos la ecuación diferencial por este factor integrante, obteniendo la ecuación:

$$(2 + \frac{y}{x^2})dx + (y - \frac{1}{x})dy = 0$$

que sí es exacta. La solución general viene dada por $F(x, y) = C$, siendo F una función tal que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2 + \frac{y}{x^2} \tag{2.20}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = y - \frac{1}{x}. \tag{2.21}$$

Comenzamos integrando la ecuación (2.21), entonces:

$$F(x, y) = \int (y - \frac{1}{x})dy = \frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} + \psi(x).$$

Derivando esta expresión respecto de x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{x^2} + \psi'(x).$$

Igualamos esta ecuación y la ecuación (2.20):

$$\frac{y}{x^2} + \psi'(x) = 2 + \frac{y}{x^2},$$

despejamos $\psi'(x)$:

$$\psi'(x) = 2$$

e integramos respecto de x:

$$\psi(x) = 2x.$$

Por tanto, la solución general es:

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y}{x} + 2x = C.$$

(b) La ecuación $y(x + y + 1)dx + x(x + 3y + 2)dy = 0$ no es exacta ya que:

$$\frac{\partial}{\partial y}(y(x + y + 1)) = x + 2y + 1 \neq \frac{\partial}{\partial x}(x(x + 3y + 2)) = 2x + 3y + 2.$$

En este caso:

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{x + 2y + 1 - (2x + 3y + 2)}{x(x + 3y + 2)} = \frac{-x - y - 1}{x(x + 3y + 2)}$$

no depende sólo de x, por tanto, no existe un factor de la forma $\mu(x)$. Busquemos un factor $\mu(y)$:

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}=\frac{2x+3y+2-(x+2y+1)}{y(x+y+1)}=\frac{x+y+1}{y(x+y+1)}=\frac{1}{y},$$

de donde:

$$\mu(y)=e^{\int\frac{1}{y}dy}=e^{\ln y}=y.$$

Multiplicamos la ecuación diferencial por este factor integrante, obteniendo la ecuación:

$$y^2(x+y+1)dx+xy(x+3y+2)dy=0$$

que sí es exacta. La solución general viene dada por $F(x,y)=C$, siendo F una función tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x}=y^2(x+y+1) \tag{2.22}$$

y

$$\frac{\partial F}{\partial y}=xy(x+3y+2). \tag{2.23}$$

Para hallar F, integramos la ecuación (2.22):

$$F(x,y)=\int(y^2x+y^3+y^2)dx=\frac{x^2y^2}{2}+y^3x+y^2x+\varphi(y). \tag{2.24}$$

Para hallar $\varphi(y)$, derivamos esta expresión respecto de y:

$$\frac{\partial F}{\partial y}=x^2y+3y^2x+2yx+\varphi'(y)$$

y la igualamos a la expresión dada en (2.23):

$$x^2y+3y^2x+2yx+\varphi'(y)=xy(x+3y+2).$$

Despejando $\varphi'(y)$ se tiene:

$$\varphi'(y)=0;$$

por tanto,

$$\varphi(y)=k \quad \text{siendo } k \text{ cualquier constante.}$$

Puesto que podemos elegir cualquier constante, elegimos $\varphi(y)=0$ y la sustituimos en (2.24) para obtener la expresión de F. La solución general es:

$$\frac{x^2y^2}{2}+y^3x+y^2x=C.$$

Podemos observar que la solución $y=0$ también es solución de la ecuación diferencial original. ■

Ejercicios de la sección 2.3

1. Demuestra que la solución de una ecuación diferencial exacta no posee soluciones singulares.

   (Sugerencia: el resultado se obtiene aplicando la condición suficiente de envolvente).

2. Demuestra que la función $\mu(x) = x^{-1}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial

$$(x + 3x^3 \sin y)\, dx + x^4 \cos y\, dy = 0$$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales exactas:

   (a) $(e^{2y} - y \cos xy)dx + (2xe^{2y} - x \cos xy + 2y)dy = 0.$

   (b) $(1 + e^x y + xe^x y)dx + (xe^x + 2)dy = 0.$

   (c) $(2xy - \sec^2 x)dx + (x^2 + 2y)dy = 0.$

   (d) $\dfrac{y}{x} \cos x + \dfrac{2y}{x^2} \sin x + \dfrac{1}{x} \sin x\, y' = 0.$

   (e) $2x \ln y\, dx + (\dfrac{x^2}{y} + y\sqrt{y^2 + 1})dy = 0,\ y(0) = \sqrt{2}.$

   (f) $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0.$

   (Solución: (a) $e^{2y}x - \sin xy + y^2 = C.$
   (b) $xye^x + 2y + x = C.$
   (c) $x^2 y + y^2 - \tan x = C.$
   (d)$x^2 y \sin x = C.$
   (e) $x^2 \ln y + \frac{1}{3}(y^2 + 1)^{3/2} = \sqrt{3}.$
   (f) $x - y = C(x + y)^3$).

4. Resuelve la ecuación diferencial $(x + y^2)dx - 2xy\, dy = 0.$

   (Solución: $\dfrac{-y^2}{x} + \ln |x| = C$).

5. Halla el valor de α para que la ecuación diferencial $(6xy^3 + \cos y)dx + (\alpha x^2 y^2 - x \sin y)dy = 0$ sea exacta y resuélvela en dicho caso.

   (Solución: $\alpha = 9$, $3x^2 y^3 + x \cos y = C$).

2.4. Ecuaciones lineales

Una clase de ecuaciones diferenciales que aparecen con frecuencia en las aplicaciones es la constituida por las ecuaciones lineales. Aunque en el tema siguiente hablaremos de las ecuaciones diferenciales lineales en general, veamos ahora cómo resolver las de primer orden mediante factores integrantes.

■ **Definición 2.4.** Una **ecuación lineal de primer orden** es aquélla que tiene la forma:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x),$$

donde $a_1(x), a_0(x)$ y $b(x)$ dependen sólo de x.

Supongamos que $a_1(x), a_0(x)$ y $b(x)$ son funciones continuas en un intervalo y que $a_1(x) \neq 0$ en este intervalo. Dividiendo por $a_1(x)$ se puede reescribir esta ecuación en forma canónica:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{2.25}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas en dicho intervalo.

Si expresamos la ecuación (2.25) en forma diferencial, se tiene:

$$[P(x)y - Q(x)]dx + dy = 0. \tag{2.26}$$

Método de resolución

- Si $P(x) \equiv 0$ la ecuación es exacta y también es separable.
- En caso contrario, la ecuación (2.26) admite un factor integrante de la forma $\mu(x)$. Como se ha visto en la sección 2.3.1 se deduce que dicho factor es:
$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}. \tag{2.27}$$

Una vez obtenido el factor integrante tenemos las siguientes opciones:

1. Multiplicar la ecuación (2.26) por $\mu(x)$ y resolver la ecuación exacta obtenida.
2. Hallar la solución de un modo más rápido multiplicando (2.25) por $\mu(x)$:
$$\mu(x)y' + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x).$$
Como al multiplicar la ecuación (2.26) por $\mu(x)$ se obtiene una ecuación exacta, se tiene que $\mu(x)P(x) = \mu'(x)$, por tanto la ecuación anterior queda:
$$\mu(x)y' + \mu'(x)\ y = \mu(x)Q(x)$$
es decir,
$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)Q(x).$$
Integrando respecto de x:
$$\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)dx + C.$$
Por tanto la solución general es:
$$y = \mu^{-1}(x)(\int \mu(x)Q(x)dx + C), \tag{2.28}$$
donde $\mu(x)$ viene dado por (2.27).

Se tiene el siguiente resultado:

Teorema 2.2. Si $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas en un intervalo $]a, b[$ que contiene al punto x_0, para cualquier valor inicial y_0 existe una única solución $y(x)$ en $]a, b[$ del problema de valor inicial:

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad y(x_0) = y_0$$

que es la solución dada por (2.28) para un C apropiado.

Ejemplo 2.7. Hallemos la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales lineales:

(a) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

(b) $y' + 2y = 3e^x$.

Solución.

(a) En esta ecuación lineal $P(x) = 2x$ y $Q(x) = 2xe^{-x^2}$. Luego el factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{\int 2x dx} = e^{x^2}.$$

Entonces,

$$\frac{d}{dx}(\mu(x)y) = \mu(x)Q(x) = e^{x^2} 2xe^{-x^2} = 2x,$$

$$\mu(x)y = \int 2x dx = x^2 + C$$

y la solución general es:

$$y = e^{-x^2}(x^2 + C).$$

(b) En este caso $P(x) = 2$ y $Q(x) = 3e^x$. Luego el factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{\int 2dx} = e^{2x}.$$

Multiplicando por $\mu(x)$ llegamos a:

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}y) = e^{2x} 3e^x = 3e^{3x},$$

por tanto,

$$e^{2x}y = \int 3e^{3x} dx = e^{3x} + C$$

y la solución general es:

$$y = e^x + Ce^{-2x}.$$

Puesto que $P(x) = 2$ y $Q(x) = 3e^x$ son funciones continuas en toda la recta real, la solución es válida en todo $\mathbb{R}$. ■

Ejemplo 2.8. Resolvamos el problema de valor inicial $\dfrac{1}{x}y' - \dfrac{2}{x^2}y = x\cos x$ con la condición inicial $y(\frac{\pi}{2}) = 3$.

Solución. En primer lugar, expresamos la ecuación en forma canónica:

$$y' - \frac{2}{x}y = x^2 \cos x,$$

entonces,

$$P(x) = -\frac{2}{x} \quad \text{y} \quad Q(x) = x^2 \cos x$$

y el factor integrante es:

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = x^{-2}.$$

Multiplicando por $\mu(x)$ se tiene que

$$\frac{d}{dx}(x^{-2}y) = x^{-2}x^2 \cos x = \cos x,$$

de donde se obtiene:

$$x^{-2}y = \int \cos x dx = \sin x + C$$

y la solución general es:

$$y = x^2(\sin x + C)$$

o bien,

$$y = x^2 \sin x + Cx^2.$$

Sustituimos ahora la condición inicial $y(\frac{\pi}{2}) = 3$, entonces:

$$3 = \frac{\pi^2}{4} + C\frac{\pi^2}{4},$$

por tanto:

$$C = \frac{12}{\pi^2} - 1$$

y la solución del problema de valor inicial es:

$$y = x^2 \sin x + x^2(\frac{12}{\pi^2} - 1).$$

Como $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas en el intervalo $]0, +\infty[$, que contiene al punto dado en la condición inicial, la solución es válida en dicho intervalo. ■

Ejercicios de la sección 2.4

1. Halla la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $2y' + 4y = 0$.

   (b) $xy' - 4y = x^6 e^x$.

   (c) $y' - y \tan x = e^{-\sin x}$.

   (d) $xy' + 3y = \dfrac{1}{x} e^x$, $y(1) = 1$.

   (e) $\dfrac{1}{2} y' - y = \cos x \, e^{2x}$.

   (f) $\dfrac{y}{x} \cos x - \dfrac{1}{x^2} \sin xy + \dfrac{1}{x} \sin x \, y' = 0$.

   (Solución: (a) $y = Ce^{-2x}$.
   (b) $y = x^5 e^x - x^4 e^x + Cx^4$.
   (c) $y = \frac{1}{\cos x}(-e^{-\sin x} + C)$.
   (d) $y = \frac{x-1}{x^3} e^x + \frac{1}{x^2}$.
   (e)$y = e^{2x}(2 \sin x + C)$.
   (f) $y = Cx \csc x$).

2.5. Cambios de variables

Cuando una ecuación diferencial de primer orden no es separable, exacta o lineal, podemos intentar transformarla en una de este tipo mediante alguna sustitución o cambio de variables.

2.5.1. La ecuación de Bernoulli

■ **Definición 2.5.** Se llama **ecuación de Bernoulli** a una ecuación diferencial de primer orden que se puede expresar de la forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n \tag{2.29}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones continuas en un intervalo $]a, b[$ y $n \in \mathbb{R}$.

Método de resolución

- Si $n = 0$ o $n = 1$, la ecuación (2.29) es una ecuación lineal.
- Si $n \neq 0$ y $n \neq 1$, entonces hacemos el cambio:

  $$v = y^{1-n}$$

  transformándose la ecuación en una lineal para las variables (x, v). Para ello, dividimos primero la ecuación (2.29) por y^n:

  $$y^{-n}y' + P(x)y^{1-n} = Q(x).$$

De este modo, como $v = y^{1-n}$ y $\frac{dv}{dx} = (1-n)\ y^{-n}\frac{dy}{dx}$, sustituyendo se tiene:

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

que es una ecuación lineal. Tenemos que tener en cuenta que al dividir por y^n se pierde la solución $y \equiv 0$, luego habrá que ver si esta solución está contenida en la solución general y si no lo está especificar que también lo es. Una vez resuelta la ecuación para $v(x)$ se deshace el cambio.

Ejemplo 2.9. Hallemos la solución de las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $xy' + y = y^2 \ln x$,

(b) $y' + y = e^x y^{-2}$.

Solución.

(a) Expresando la ecuación en forma normal, tenemos:

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\ln x}{x}y^2$$

que es una ecuación de Bernoulli, ya que es de la forma (2.29), con $n = 2$. Multiplicamos la ecuación por y^{-2} :

$$y^{-2}y' + \frac{1}{x}y^{-2}y = \frac{\ln x}{x}$$

y hacemos el cambio:

$$v = y^{-1},$$

por tanto:

$$\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx}.$$

Sustituyendo, queda:

$$-\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x}v = \frac{\ln x}{x},$$

es decir:

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = -\frac{\ln x}{x}$$

que es una ecuación lineal para v con $P(x) = -\dfrac{1}{x}$ y $Q(x) = -\dfrac{\ln x}{x}$; entonces, la solución es:

$$v = \mu^{-1}(x)(\int \mu(x)Q(x)dx + C)$$

con

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{1}{x}dx} = e^{-\ln|x|} = x^{-1}.$$

Por tanto,

$$v(x) = x\int -\frac{\ln x}{x^2}dx = x(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C) = \ln x + 1 + Cx.$$

Como $v = y^{-1}$, deshaciendo el cambio obtenemos solución:

$$y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx},$$

además de la solución $y = 0$.

Puesto que $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en el intervalo $]0, +\infty[$, la solución obtenida es válida en dicho intervalo.

(b) La ecuación diferencial $y' + y = e^x y^{-2}$ es una ecuación de Bernoulli con $n = -2$. Por tanto, multiplicamos la ecuación por y^2 :

$$y^2 y' + y^3 = e^x$$

y hacemos el cambio $v = y^3$. Entonces:

$$\frac{dv}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx}.$$

Al sustituir, tenemos:

$$\frac{1}{3}\frac{dv}{dx} + v = e^x,$$

es decir:

$$\frac{dv}{dx} + 3v = 3e^x,$$

ecuación lineal cuya solución es:

$$v(x) = \mu^{-1}(x)(\int \mu(x)Q(x)dx + C)$$

con

$$\mu(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x} \qquad \text{y} \qquad Q(x) = 3e^x.$$

Por tanto,

$$v(x) = e^{-3x}\int 3e^{4x}dx = 3e^{-3x}(\frac{e^{4x}}{4} + C) = \frac{3}{4}e^x + Ce^{-3x}.$$

Deshaciendo el cambio inicial $v = y^3$, obtenemos la solución

$$y^3 = \frac{3}{4}e^x + Ce^{-3x}.$$

En este caso, $y = 0$ no era solución de la ecuación dada. Como $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en todo el intervalo real, la solución obtenida es válida $\forall x \in \mathbb{R}$. ■

2.5.2. Ecuaciones homogéneas

■ **Definición 2.6.** Una ecuación diferencial ordinaria de la forma:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.30}$$

es **homogénea** si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas del mismo grado.

■ **Definición 2.7.** Una ecuación diferencial ordinaria de la forma:

$$y' = f(x,y) \tag{2.31}$$

es **homogénea** si la función $f(x,y)$ es homogénea de grado 0.

Recordemos que una función de dos variables $f(x,y)$ es homogénea de grado m si, dado un real positivo α, se verifica que:

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^m f(x,y).$$

⬢ **Ejemplo 2.10.** Veamos que la función $f(x,y) = xy + x^2 + y^2$ es homogénea de grado 2.

Solución. Puesto que

$$f(\alpha x, \alpha y) = (\alpha x)(\alpha y) + (\alpha x)^2 + (\alpha y)^2 = \alpha^2 xy + \alpha^2 x^2 + \alpha^2 y^2 = \alpha^2 f(x,y)$$

es función homogénea de grado 2. ■

⬢ **Ejemplo 2.11.** Veamos que la función $f(x,y) = \tan \dfrac{x}{y}$ es homogénea de grado 0.

Solución. Puesto que

$$f(\alpha x, \alpha y) = \tan \frac{\alpha x}{\alpha y} = \tan \frac{x}{y} = f(x,y) = \alpha^0 f(x,y)$$

es función homogénea de grado 0. ■

⬢ **Ejemplo 2.12.** Comprobemos si las siguientes ecuaciones son homogéneas:

(a) $(x-y)dx + xdy = 0.$

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-x}{x-2y+1}.$

Solución.

(a) La ecuación diferencial $(x-y)dx + xdy = 0$ es homogénea ya que las funciones $M(x,y) = x-y$ y $N(x,y) = x$ son ambas funciones homogéneas de grado 1, ya que

$$M(\alpha x, \alpha y) = \alpha x - \alpha y = \alpha(x-y) = \alpha M(x,y)$$

y

$$N(\alpha x, \alpha y) = \alpha x = \alpha N(x,y).$$

(b) La ecuación diferencial $y' = \dfrac{y-x}{x-2y+1}$ no es homogénea ya que la función $f(x,y) = \dfrac{y-x}{x-2y+1}$ no es homogénea de grado 0, pues

$$f(\alpha x, \alpha y) = \frac{\alpha y - \alpha x}{\alpha x - 2\alpha y + 1} \neq f(x,y). \blacksquare$$

Método de resolución

Una ecuación diferencial homogénea se convierte en una ecuación diferencial de variables separables mediante la siguiente transformación:

- Hacemos el cambio $(x, y) \to (x, u)$ dado por:

$$y = u\,x$$

  de donde,

$$dy = udx + xdu.$$

- Si tenemos la ecuación en la forma (2.30), la dividimos por x^m, donde m es el grado de homogeneidad de M y N. Si tenemos la ecuación en la forma (2.31), la dividimos por la mínima potencia de x. La ecuación se convierte en una ecuación de variables separables.

- Resolvemos obteniendo la solución para $u(x)$.

- Deshacemos el cambio y obtenemos la solución para $y(x)$.

■ **Nota 2.3.** En algunos casos, para simplificar integrales que aparecen con el cambio anterior, podemos optar por el cambio $(x, y) \to (v, y)$ dado por $x = v\,y$.

⬢ **Ejemplo 2.13.** Resolvamos las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $(xy + y^2 + x^2)dx - x^2dy = 0$,

(b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x \sec \frac{y}{x} + y}{x}$.

Solución.

(a) Se trata de una ecuación homogénea, pues $M(x, y) = xy + y^2 + x^2$ y $N(x, y) = -x^2$ son ambas funciones homogéneas del mismo grado, de grado 2. Por tanto, hacemos el cambio $y = ux$, con $dy = udx + xdu$, obteniendo:

$$(xux + u^2x^2 + x^2)dx - x^2(udx + xdu) = 0.$$

Dividiendo toda la ecuación por x^2 :

$$(u + u^2 + 1)dx - (udx + xdu) = 0,$$

$$(u + u^2 + 1)dx - udx - xdu = 0$$

y agrupando términos tenemos:

$$(u^2 + 1)dx - xdu = 0.$$

Tenemos ahora una ecuación separable, por tanto:

$$\frac{du}{(u^2 + 1)} = \frac{dx}{x},$$

integramos ambos lados:

$$\arctan u = \ln|x| + C$$

y despejamos la variable u:

$$u = \tan(\ln|x| + C).$$

Ahora, deshacemos el cambio sustituyendo u por y/x, y obtenemos la solución general:

$$y = x\ \tan(\ln|x| + C).$$

(b) Se trata de una ecuación homogénea ya que $f(x, y) = \dfrac{x \sec \frac{y}{x} + y}{x}$ es una función homogénea de grado 0. Por tanto, considerando la ecuación en forma diferencial:

$$xdy - (x \sec \frac{y}{x} + y)dx = 0,$$

hacemos el cambio $y = ux$, con $dy = udx + xdu$, obteniendo:

$$x(udx + xdu) - (x \sec \frac{ux}{x} + ux)dx = 0.$$

Dividiendo toda la ecuación por x:

$$udx + xdu - (\sec u + u)dx = 0$$

y simplificando tenemos:

$$-\sec u\, dx + x\, du = 0.$$

Tenemos ya una ecuación separable:

$$x\, du = \sec u\ dx.$$

Separamos las variables:

$$\cos u\ du = \frac{dx}{x},$$

integramos a ambos lados:

$$\sin u = \ln|x| + C_1$$

y despejamos la variable u:

$$\sin u = \ln|x| + C_1 \rightarrow u = \arcsin(\ln|x| + C_1).$$

Ahora, deshacemos el cambio mediante $u = y/x$, obteniendo la solución general:

$$y = x\ \arcsin(\ln|x| + C_1).$$

Considerando $C_1 = \ln C$, podemos expresar la solución de la forma:

$$y = x\ \arcsin(\ln|Cx|),\ \text{con}\ C > 0.\ \blacksquare$$

2.5.3. Ecuaciones con coeficientes lineales

Dada una ecuación diferencial de la forma:

$$F(a_1x + b_1y + c_1)dx + G(a_2x + b_2y + c_2)dy = 0,$$

o bien:

$$\frac{dy}{dx} = G(a_1x + b_1y),$$

podremos transformarla en homogénea o separable mediante un cambio de variables.

Método de resolución

Se presentan dos casos:

1. Si las rectas $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ y $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ se cortan en un punto (α, β), hacemos el cambio $(x, y) \to (v, w)$ definido por:

$$\begin{aligned} v &= x - \alpha \\ w &= y - \beta \end{aligned}$$

   y la ecuación diferencial se convierte en homogénea.

2. Si las rectas $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ y $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ son paralelas, hacemos el cambio $(x, y) \to (x, z)$ definido por:

$$z = a_1x + b_1y$$

   y la ecuación diferencial se convierte en separable.

Ejemplo 2.14. Resolvamos la ecuación diferencial:

$$(-3x + y + 6)\, dx + (x + y + 2)\, dy = 0.$$

Solución. Resolviendo el sistema, vemos que las rectas $-3x + y + 6 = 0$ y $x + y + 2 = 0$ se cortan en el punto $(1, -3)$. Por tanto, hacemos el cambio $(x, y) \to (v, w)$ dado por:

$$\begin{aligned} v &= x - 1, \\ w &= y + 3. \end{aligned}$$

Con este cambio, debemos hacer las sustituciones:

$$\begin{aligned} x &= v + 1, \qquad & dx &= dv, \\ y &= w - 3, \qquad & dy &= dw. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(-3v - 3 + w - 3 + 6)\, dv + (v + 1 + w - 3 + 2)\, dw = 0$$

$$(-3v + w)\, dv + (v + w)\, dw = 0$$

y obtenemos una ecuación diferencial homogénea. Para resolverla, hacemos el cambio $(v, w) \to (v, u)$ dado por $w = uv$, con $dw = udv + vdu$. Entonces:

$$(-3v + uv)\, dv + (v + uv)\,(udv + vdu) = 0.$$

Simplificando, se tiene:

$$(-3 + u)\, dv + (1 + u)\, udv + (1 + u)vdu = 0,$$

$$(-3 + 2u + u^2)\, dv + (1 + u)vdu = 0.$$

Tenemos ahora una ecuación diferencial separable. Por tanto, separamos las variables:

$$\frac{1 + u}{u^2 + 2u - 3}du = \frac{-1}{v}dv$$

e integramos ambos lados, obteniendo:

$$\frac{1}{2} \ln \left| u^2 + 2u - 3 \right| = - \ln |v| + C_1.$$

Si tomamos $C_1 = \ln C_2$, con $C_2 > 0$, podemos escribir:

$$\frac{1}{2} \ln \left| u^2 + 2u - 3 \right| = \ln \frac{C_2}{|v|}$$

$$\left| u^2 + 2u - 3 \right| = \frac{C_2^2}{v^2},$$

de donde:

$$\left| u^2 + 2u - 3 \right| = \frac{C_3}{v^2} \text{ con } C_3 > 0.$$

Quitando el valor absoluto, se tiene:

$$u^2 + 2u - 3 = C_3 v^{-2}, \text{ con } C_3 \neq 0.$$

Deshaciendo el segundo cambio, $u = \dfrac{w}{v}$, obtenemos:

$$\frac{w^2}{v^2} + 2\frac{w}{v} - 3 = C_3 v^{-2},$$

por tanto:

$$\frac{w^2}{v^2} + 2\frac{w}{v} - 3 = C_3 v^{-2} \to w^2 + 2vw - 3v^2 = C_3.$$

Deshaciendo ahora el primer cambio $v = x - 1$, $w = y + 3$, tenemos:

$$(y + 3)^2 + 2(x - 1)(y + 3) - 3(x - 1)^2 = C_3, \text{ con } C_3 \neq 0.$$

Comprobamos si al dividir por u^2+2u-3, esto es, al suponer $u^2+2u-3 \neq 0$, nos hemos dejado alguna solución:

$$u^2 + 2u - 3 = 0 \quad \to \left\{ \begin{array}{l} u = 1 \\ u = -3 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} \frac{w}{v} = 1 \\ \frac{w}{v} = -3 \end{array} \right. \to$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y + 3 = x - 1 \\ y + 3 = -3(x - 1) \end{array} \right. \quad \to \left\{ \begin{array}{l} y = x - 4 \\ y = -3x \end{array} \right.$$

Vemos que ambas funciones son soluciones y que corresponderían al caso $C_3 = 0$; por tanto, podemos expresar la solución general de la forma:

$$(y+3)^2 + 2(x-1)(y+3) - 3(x-1)^2 = C_3, \ \forall C_3 \in \mathbb{R}. \ \blacksquare$$

Ejemplo 2.15. Resolvamos la ecuación diferencial:

$$(x + 2y - 2)\, dx + (2x + 4y + 5)\, dy = 0.$$

Solución. Las rectas $x + 2y - 2 = 0$ y $2x + 4y + 5 = 0$ son paralelas, por tanto haremos el cambio $(x, y) \to (x, z)$ dado por $z = x+2y$. Con este cambio, debemos hacer las sustituciones:

$$y = \frac{z-x}{2}, \qquad dy = \frac{dz - dx}{2};$$

entonces,

$$(x + z - x - 2)\, dx + (2x + 2z - 2x + 5)\,(\frac{dz - dx}{2}) = 0,$$

$$(z-2)\, dx + (\frac{2z+5}{2})\, dz - (\frac{2z+5}{2})\, dx = 0,$$

$$\frac{-9}{2} dx + (z + \frac{5}{2})\, dz = 0.$$

Obtenemos, en este caso, una ecuación diferencial separable. Separando las variables:

$$(2z+5)dz = 9dx$$

e integrando ambos lados:

$$z^2 + 5z = 9x + C.$$

Deshaciendo el cambio $z = x+2y$, obtenemos la solución general implícita:

$$(x+2y)^2 + 5(x+2y) = 9x + C. \ \blacksquare$$

Ejercicios de la sección 2.5

1. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $y' - 5y = -\frac{5}{2}xy^3$.

   (b) $y' = \dfrac{y^2 + 2xy}{x^2}$.

   (c) $y' + \dfrac{y}{x-2} = 5(x-2)\sqrt{y}$.

   (d) $y' - \dfrac{1}{x}y + \dfrac{1}{4}(1+x^2)y^3 = 0$

(Solución: (a)$\{y=(\frac{x}{2}-\frac{1}{20}+Ce^{-10x})^{-1/2},\ y=0\}$.
(b)$\{y=\frac{x^2}{C-x},\ y=0\}$.
(c)$\{y=((x-2)^2+C(x-2)^{-1/2})^2,\ y=0\}$.
(d) $y^2=\frac{30}{5x+3x^3+Cx^{-2}}$).

2. Comprueba si la función $f(x,y)=\frac{x^2y+xy^2}{x-y}$ es homogénea y en caso afirmativo indica el grado. (Solución: homogénea de grado 2).

3. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales.

   (a) $-2x^2-2xy+y^2+x^2y'=0,\ y(1)=3$.
   (b) $xy\,dx-x^2\,dy=y\sqrt{x^2+y^2}dy,\ y(0)=1$.
   (c) $(2xy^2-3y^3)dx+(7y^3-xy^2)dy=0$.
   (d) $x^2y'=xy+x^2e^{y/x},\ x>0$.
   (e) $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}{xy}$.

   (Solución: (a) $y=\frac{8x^4+x}{4x^3-1}$.
   (b) $\sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}=\ln y+1$.
   (c) $2x^2-6xy+7y^2=C$.
   (d)$y=-x\ln(\ln\frac{1}{x}+C)$.
   (e) $\sqrt{x^2+y^2}=x\ \ln C\,|x|\,,\ C>0$).

4. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $(x-2y-1)dx+(3x-6y+2)dy=0$.
   (b) $(x+2y+3)dx+(2x+4y-1)dy=0$.
   (c) $2x+2y-1+y'(x+y-2)dy=0,\ y(0)=1$.
   (d) $(x+y-4)dx+(x-y+2)dy=0$.
   (e) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+y+7}{-2(x+y)+1}$.
   (f) $\frac{dy}{dx}=y-x-1+(x-y+2)^{-1}$.

   (Solución: (a) $(x-2y)^2=Ce^{2x+6}$.
   (b) $(x+2y)^2+6x-2y=C$.
   (c) $(x-1)^2+2(x-1)(y-3)-(y-3)^2=C$.
   (d) $x+y+1=2e^{\frac{2x+y-1}{3}}$).
   (e) $x+y-8=C\,e^{\frac{-x-2y}{15}},\ C\neq 0$.
   (f) $(x-y)^2+4(x-y)+3=Ce^{2x}$).

2.6. Aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden

En esta sección vamos a considerar determinados fenómenos reales relacionados con diversos ámbitos como la física, ingeniería, meteorología, sociología, etc, cuya modelización da lugar a una ecuación diferencial de primer orden. Para resolver las ecuaciones obtenidas aplicaremos los métodos estudiados.

2.6.1. Trayectorias ortogonales

Dada una familia de curvas, consideramos el problema de encontrar otra familia de curvas que las intersecten ortogonalmente en cada punto. Este problema aparece en el estudio de electricidad y magnetismo y en la elaboración de cartas meteorológicas.

Consideremos una familia de curvas

$$F(x,y) = C, \tag{2.32}$$

siendo C un parámetro. Derivando implícitamente esta ecuación obtenemos la ecuación diferencial asociada a esta familia:

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = 0.$$

A partir de esta ecuación diferencial podemos obtener la pendiente de cada curva:

$$m = \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}.$$

La pendiente para una curva que sea ortogonal es $-\frac{1}{m}$, es decir:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}.$$

Esto significa que las curvas ortogonales a la familia dada satisfacen la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial F}{\partial y}dx - \frac{\partial F}{\partial x}dy = 0. \tag{2.33}$$

Atendiendo al razonamiento anterior, dada una familia de curvas solución de la ecuación diferencial:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{2.34}$$

planteamos la ecuación diferencial:

$$N(x,y)dx - M(x,y)dy = 0$$

cuyas curvas solución son ortogonales a cada curva de la familia solución de (2.34).

Se dice que cada familia es una **familia de curvas ortogonales** a la otra.

Método de resolución

La familia de trayectorias ortogonales a una familia dada por la ecuación (2.32) es la familia solución de la ecuación diferencial (2.33).

Ejemplo 2.16. Dada la familia de curvas $x^2 + y^2 = C$, veamos que la familia de trayectorias ortogonales a ésta, es la familia de rectas que pasan por el origen.

Solución. Calculamos la ecuación diferencial asociada a la familia $x^2+y^2 = C$:

$$2xdx + 2ydy = 0.$$

Entonces, la familia de trayectorias ortogonales satisface la ecuación:

$$2ydx - 2xdy = 0.$$

Resolvemos esta ecuación de variables separables:

$$x\,dy = y\,dx,$$

$$\frac{1}{y}dy = \frac{1}{x}dx,$$

integrando:

$$\ln|y| = \ln|x| + C_1;$$

por tanto:

$$|y| = |x| + e^{C_1},$$

es decir:

$$y = Cx, \;\; C \neq 0.$$

Como $y = 0$ también es solución, la añadimos a la familia quitando la condición $C \neq 0$. Por tanto, la familia de trayectorias ortogonales es:

$$y = Cx, \;\; \forall C \in \mathbb{R},$$

que representa la familia de rectas que pasan por el origen (ver Figura 2.1).

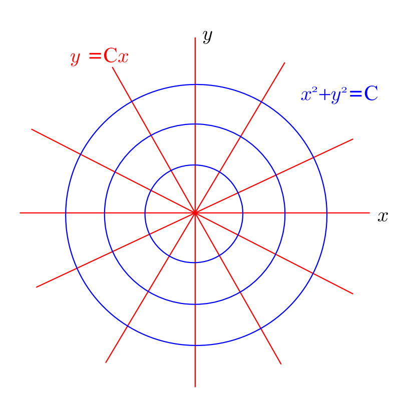


Figura 2.1: Familias de curvas ortogonales.

■

Ejemplo 2.17. Hallemos la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas definida implícitamente por

$$4y + x^2 + 1 - Ce^{2y} = 0.$$

Solución. Para hallar la ecuación diferencial asociada a esta familia, la reescribimos de la forma:

$$(4y + x^2 + 1)e^{-2y} = C$$

y diferenciamos:

$$2xe^{-2y}dx + \big((4e^{-2y} + (4y + x^2 + 1)e^{-2y}(-2)\big)\, dy = 0$$

Simplificando, se tiene que la ecuación diferencial asociada a la familia dada es:

$$xdx + (1 - 4y - x^2)dy = 0.$$

La ecuación diferencial asociada a la familia de trayectorias ortogonales es:

$$(-1 + 4y + x^2)dx + xdy = 0. \tag{2.35}$$

Resolvamos esta ecuación. Sea $M(x, y) = -1 + 4y + x^2$ y sea $N(x, y) = x$. Podemos ver que no es una ecuación exacta ya que:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4 \neq \frac{\partial N}{\partial x} = 1,$$

pero admite un factor integrante de la forma $\mu(x)$ puesto que la expresión

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{3}{x}$$

sólo depende de x. Por tanto:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3.$$

Multiplicando (2.35) por este factor integrante, obtenemos una ecuación exacta:

$$(-x^3 + 4x^3y + x^5)dx + x^4dy = 0.$$

La solución es $F(x, y) = C$, siendo F una función tal que:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = -x^3 + 4x^3y + x^5 \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial y} = x^4. \end{cases}$$

Comenzamos integrando la segunda ecuación de este sistema respecto de y :

$$F(x, y) = \int x^4dy = x^4y + \psi(x).$$

Derivando respecto de x e igualando a la primera ecuación del sistema se tiene:

$$4x^3y + \psi'(x) = -x^3 + 4x^3y + x^5,$$

de donde despejamos:

$$\psi'(x) = x^5 - x^3.$$

Integrando respecto de x :

$$\psi(x) = \int (x^5 - x^3)dx = \frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4}.$$

La solución de la ecuación diferencial exacta es:

$$x^4y + \frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{4} = C$$

y la familia de curvas ortogonales viene dada por:

$$y = \frac{C}{x^4} + \frac{1}{4} - \frac{x^2}{6}. \blacksquare$$

2.6.2. Problemas de enfriamiento

De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, la tasa de cambio de la temperatura T de un cuerpo respecto del tiempo, en un instante t, en un medio de temperatura constante A, es proporcional a la diferencia entre la temperatura del medio y la del cuerpo, es decir, proporcional a $A - T$. La ecuación diferencial que nos da la variación de temperatura de un cuerpo viene dada por:

$$\frac{dT}{dt} = k\,(A - T),$$

donde $k > 0$ es la constante de transferencia de calor.

⬢ **Ejemplo 2.18.** La sala de disección de un forense se mantiene fría a una temperatura constante de 5 °C. Mientras se encontraba realizando la autopsia de una víctima de asesinato, el propio forense es asesinado. A las 10 am el ayudante del forense descubre su cadáver a una temperatura de 23 °C. A las 12 am su temperatura es de 17 °C. Suponiendo que el forense tenía en vida la temperatura normal de 37 °C, veamos a qué hora fue asesinado.

Solución. Aplicando la ley de enfriamiento de Newton llegamos a la ecuación diferencial separable:

$$\frac{dT}{dt} = k\,(5 - T).$$

Separando las variables e integrando ambos lados, se tiene:

$$\ln|5 - T| = -k\,t + C_1.$$

Despejando la variable dependiente:

$$T(t) = 5 + Ce^{-kt}, \text{ con } C \neq 0.$$

Tomamos como instante inicial $t = 0$ las 10 am, luego si $T(0) = 23$ °C, se tiene:

$$23 = 5 + C,$$

de donde $C = 18$ y la solución particular buscada queda de la forma:

$$T(t) = 5 + 18e^{-kt}.$$

Para hallar el valor de la constante k tenemos en cuenta el dato de que al cabo de 2 horas la temperatura es de 17 °C, luego $T(2) = 17$ °C. Sustituyendo estos datos en la solución tenemos:

$$17 = 5 + 18e^{-2k}, \text{ luego } k = -\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3} \simeq 0{,}202733...$$

Por consiguiente,

$$T(t) = 5 + 18e^{-0{,}202733t}.$$

Para averiguar a qué hora fue el crimen igualamos la temperatura a 37 °C y despejamos t:

$$37 = 5 + 18e^{-0{,}202733t}; \text{ por tanto } t \simeq -2\text{h}\,50\text{min}.$$

Luego el crimen se produjo aproximadamente 2 horas y 50 minutos antes de las 10 am, es decir a las 7 horas y 10 minutos de la mañana. ■

2.6.3. Mecánica Newtoniana

La Mecánica estudia el movimiento de los objetos bajo el efecto de las fuerzas que actúan sobre ellas. La Mecánica Newtoniana o clásica estudia el movimiento de objetos ordinarios, es decir, objetos que son grandes comparados con un átomo y cuyo movimiento es lento comparado con la velocidad de la luz. Planteamos las ecuaciones del movimiento de un cuerpo utilizando la segunda ley de Newton:

$$m\,\vec{a} = \vec{F}(t, x, \frac{dx}{dt}), \tag{2.36}$$

donde el término de la derecha representa la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo en el instante t, en la posición x y con velocidad $v = \dfrac{dx}{dt}$.

Para aplicar las leyes de Newton a un problema de mecánica, seguiremos el siguiente procedimiento:

1. Determinar todas las fuerzas que actúan sobre el objeto en estudio.
2. Elegir un sistema de ejes coordenados apropiados y representar el movimiento del objeto y las fuerzas que actúan sobre él.
3. Aplicar la segunda ley de Newton mediante la ecuación (2.36) para determinar las ecuaciones del movimiento del objeto.

■ **Nota 2.4.** Supondremos que la aceleración de la gravedad es constante con valor $g = 9{,}8$ m/sg^2.

Ejemplo 2.19. Lanzamos un objeto de masa m con una velocidad inicial v_0 dirigida hacia abajo. Suponiendo que la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto, determinemos:

- La ecuación que modeliza el movimiento de dicho objeto.
- La distancia recorrida por el objeto en función del tiempo.
- La velocidad del objeto en función del tiempo.

Solución.

Sobre el objeto actúan dos fuerzas: una fuerza constante debida a la acción de la gravedad, dirigida verticalmente hacia abajo y de módulo $F_1 = mg$, y una fuerza correspondiente a la resistencia del aire, contraria al movimiento y proporcional a la velocidad del objeto, $F_2 = -kv(t) = -k\dfrac{dx}{dt}$, siendo $x(t)$ la distancia recorrida por el objeto en su caída en un instante t. Consideramos como eje de coordenadas un eje vertical con el valor $x = 0$ en la posición desde donde lanzamos el objeto hacia abajo, correspondiente al instante inicial $t = 0$ (ver Figura 2.2).

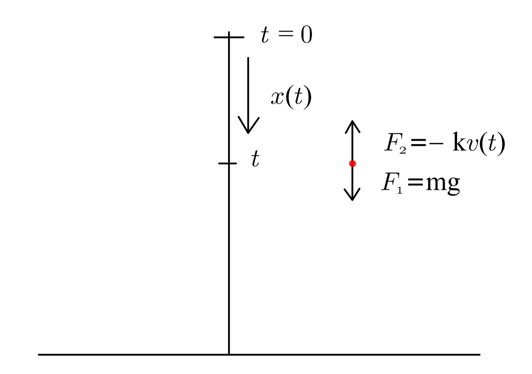


Figura 2.2: Fuerzas que actúan en la caída de un objeto.

La fuerza total que actúa sobre el cuerpo es:

$$F = F_1 + F_2 = mg - kv.$$

Aplicando la segunda ley de Newton, obtenemos la ecuación diferencial que modeliza este problema:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

con la condición inicial $v(0) = v_0$.

Resolviendo esta ecuación diferencial de variables separables obtenemos $v(t)$, la velocidad en cada instante t:

$$\frac{mdv}{mg - kv} = dt,$$

integrando se tiene:

$$\frac{-m}{k}\ln|mg-kv| = t + C_1,$$

$$|mg-kv| = C_2 e^{\frac{-kt}{m}}, \;\; C_2 = e^{C_1} > 0,$$

$$mg-kv = C_3 e^{\frac{-kt}{m}}, \;\; C_3 = \pm C_2,$$

$$kv = mg - C_3 e^{\frac{-kt}{m}}, \;\; C_3 \neq 0,$$

finalmente:

$$v(t) = \frac{mg}{k} - Ce^{\frac{-kt}{m}}, \;\; C \neq 0.$$

Como $mg - kv = 0$ es solución de la ecuación diferencial, añadimos esta solución, $v(t) = \frac{mg}{k}$, eliminando la condición $C \neq 0$ y así tenemos la solución general. Como nos interesa la solución particular que verifica la condición inicial $v(0) = v_0$, sustituimos la condición y despejamos C:

$$v_0 = \frac{mg}{k} - C, \quad \text{por tanto:} \;\; C = \frac{mg}{k} - v_0.$$

Sustituyendo C en la ecuación, tenemos la solución de la ecuación diferencial, que nos da la velocidad del objeto en función del tiempo:

$$v(t) = \frac{mg}{k} - (\frac{mg}{k} - v_0)e^{\frac{-kt}{m}}. \tag{2.37}$$

Para obtener la distancia recorrida por el objeto en cada instante t, integramos $v(t)$ respecto de t ya que $v(t) = \dfrac{dx}{dt}$:

$$x(t) = \int v(t)dt = \frac{mg}{k}t + \frac{m}{k}(\frac{mg}{k} - v_0)e^{\frac{-kt}{m}} + K. \tag{2.38}$$

Sustituyendo ahora la condición inicial $x(0) = 0$, calculamos la constante de integración K :

$$0 = \frac{m}{k}(\frac{mg}{k} - v_0) + K, \quad \text{por tanto:} \;\; K = \frac{m}{k}(v_0 - \frac{mg}{k}).$$

Finalmente, sustituyendo K en (2.38) tenemos que la distancia recorrida por el objeto en cada instante t es:

$$x(t) = \frac{mg}{k}t + \frac{m}{k}(v_0 - \frac{mg}{k})(1 - e^{\frac{-kt}{m}}). \;\blacksquare \tag{2.39}$$

⬢ **Ejemplo 2.20.** Un objeto de masa 3 kg se deja caer desde 500 metros de altura. Suponiendo que la fuerza de la gravedad es constante y que la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del objeto, con constante de proporcionalidad $k = 3$ kg/sg, veamos en qué momento el objeto golpeará contra el suelo.

Solución. Consideramos el modelo visto en el ejemplo anterior con los datos $m = 3$, $k = 3$, $g = 9{,}81$ y, puesto que el objeto se deja caer, $v_0 = 0$. La ecuación (2.39) queda:

$$x(t) = 9{,}81t - 9{,}81(1 - e^{-t}).$$

En el instante en que el objeto golpee contra el suelo, éste habrá recorrido 500 m, por tanto $x(t) = 500$:

$$500 = 9{,}81t - 9{,}81(1 - e^{-t}) = 9{,}81t - 9{,}81 - 9{,}81e^{-t} \to t + e^{-t} = 51{,}97.$$

Como no sabemos despejar t, podemos utilizar un método numérico de resolución o bien, podemos considerar que e^{-t} es muy pequeño para valores cercanos a 51,97 y despreciar dicho término, tomando como resultado aproximado:

$$t \simeq 51{,}97 \text{ sg} \blacksquare$$

Ejemplo 2.21. Un paracaidista cuya masa es 75 kg se deja caer desde un helicóptero que se encuentra suspendido a 4000 m de altura sobre la superficie y cae hacia la tierra bajo la influencia de la gravedad. Se supone que la fuerza gravitacional es constante y que la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del paracaidista, con constante de proporcionalidad $k_1 = 15$ kg/sg cuando el paracaídas está cerrado y $k_2 = 105$ kg/sg cuando está abierto. Si el paracaídas se abre 1 minuto después de abandonar el helicóptero, veamos al cabo de cuántos segundos llegará el paracaidista a la superficie.

Solución. Sólo estamos interesados en el momento en que el paracaidista llega al suelo, no dónde, por tanto, consideramos sólo la componente vertical del descenso. En este problema necesitamos dos ecuaciones, una que describa el movimiento antes de abrir el paracaídas y otra para después de abrirlo.

Antes de abrir el paracaídas: tenemos el mismo modelo que en el Ejemplo 2.19, con los datos $v_0 = 0$, $m = 75$, $k = k_1 = 15$ y $g = 9{,}81$. Denotamos $x_1(t)$ a la distancia descendida por el paracaidista en t segundos y $v_1(t) = \frac{dx_1}{dt}$, entonces, sustituyendo en (2.37) y (2.39), tenemos:

$$v_1(t) = 49{,}05(1 - e^{-0{,}2t}),$$
$$x_1(t) = 49{,}05t - 245{,}25(1 - e^{-0{,}2t}).$$

Por consiguiente, al cabo de $t = 60$ segundos, el paracaidista está descendiendo a una velocidad de $v_1(60) = 49{,}05$ m/sg y ha descendido $x_1(60) = 2697{,}75$ m. En este instante se abre el paracaídas.

Después de abrir el paracaídas: el paracaidista está a 1302,25 m del suelo con una velocidad de 49,05 m/sg. De nuevo tenemos el mismo modelo que en el Ejemplo 2.19, pero con los datos $v_0 = 49{,}05$, $m = 75$, $k = k_2 = 105$ y $g = 9{,}81$. Denotamos $x_2(t)$ a la distancia descendida por el paracaidista en t segundos y $v_2(t)$ a su velocidad en un instante t; entonces, sustituyendo en (2.39), tenemos:

$$x_2(t) = 7{,}01t + 30{,}03(1 - e^{-1{,}4t}).$$

Para determinar en qué momento llega a la superficie, hacemos $x_2(t) = 1302{,}25$ y, despejando t, sabremos cuántos segundos transcurren hasta llegar al suelo desde que se abrió el paracaídas:

$$1302{,}25 = 7{,}01t + 30{,}03(1 - e^{-1{,}4t}) \rightarrow t - 4{,}28e^{-1{,}4t} - 181{,}49 = 0.$$

Despreciando el término exponencial, se tiene $t = 181{,}49$ segundos. Luego llegará al suelo $181{,}49 + 60 = 241{,}49$ segundos después de haberse lanzado desde el helicóptero. ■

2.6.4. Problemas de mezclas

Sea $x(t)$ la cantidad de sustancia presente en el tanque en el instante t y sea $\frac{dx}{dt}$ la rapidez con que x cambia respecto al tiempo.

Para un tiempo t, la velocidad de cambio de la sustancia en el tanque, $\dfrac{dx}{dt}$, debe ser igual a la velocidad a la que dicha sustancia entra en el tanque menos la velocidad a la que lo abandona, es decir, la ecuación diferencial que modeliza este problema viene dada por:

$$\frac{dx}{dt} = v_e - v_s$$

donde

$$v_e(cantidad/t) = \begin{array}{c}\text{velocidad de entrada}\\ \text{del fluido } (vol/t)\end{array} \times \begin{array}{c}\text{concentración al}\\ \text{entrar } (cantidad/vol)\end{array}$$

$$v_s(cantidad/t) = \begin{array}{c}\text{velocidad de salida}\\ \text{del fluido } (vol/t)\end{array} \times \begin{array}{c}\text{concentración al}\\ \text{salir } (cantidad/vol)\end{array}$$

La concentración de salida es la cantidad de sustancia $x(t)$ dividida por el volumen total en el tanque en dicho instante t.

⬢ **Ejemplo 2.22.** Consideremos un tanque que, para un tiempo inicial $t = 0$, contiene Q_0 kg de sal disuelta en 100 litros de agua. Supongamos que en el tanque entra agua conteniendo $\frac{1}{4}$ kg de sal por litro, a razón de 3 litros/minuto y que la solución bien mezclada sale del tanque a la misma velocidad. Hallemos una expresión que nos proporcione la cantidad de sal que hay en el tanque en un tiempo t. Hallemos también una expresión que nos proporcione la concentración de sal en el tanque en cada instante t.

Solución. Sea $x(t)$ la cantidad de sal (en kg) en el tanque en un instante t. La velocidad de cambio de sal en el tanque para un tiempo t, $x'(t)$, debe ser igual a la velocidad de entrada de la sal en el tanque menos la velocidad de salida:

$$\frac{dx}{dt} = v_e - v_s,$$

siendo

$$v_e = \frac{1}{4} \ \text{kg/l} \times 3 \ \text{l/min},$$
$$v_s = \frac{x(t)}{100} \ \text{kg/l} \times 3 \ \ \text{l/min}.$$

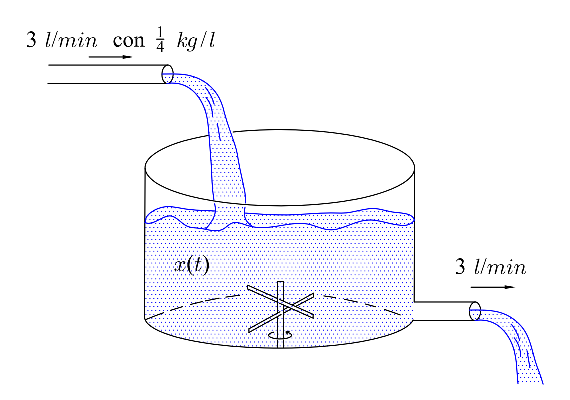


Figura 2.3: Mezcla en un tanque.

Observamos que el volumen de agua en el tanque es constante, 100 litros, ya que entra y sale la misma cantidad de fluido por minuto.

Por consiguiente, tenemos la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{3}{4} - \frac{3}{100}x(t).$$

Ésta es una ecuación lineal y su solución general es:

$$x(t) = 25 + Ce^{-0{,}03t}.$$

Para verificar la condición inicial $x(0) = Q_0$, se tendrá que $C = Q_0 - 25$, por tanto:

$$x(t) = 25(1 - e^{-0{,}03t}) + Q_0 e^{-0{,}03t} \tag{2.40}$$

es la expresión que nos da la cantidad de sal que hay en el tanque en un tiempo t.

El primer término de la expresión (2.40) representa la cantidad debida a la acción del proceso. Cuando t crece, este término se aproxima a 25. Físicamente, éste será el valor límite de x a medida que la solución original va siendo reemplazada por la solución que entra con una concentración de sal de $\frac{1}{4}$ kg/l.

La concentración, $C(t)$, de sal en un instante t es:

$$C(t) = \frac{x(t)}{100},$$

puesto que el volumen es 100 litros. ■

Ejemplo 2.23. Consideremos un depósito grande que contiene 1000 l de agua. Una solución salada de salmuera empieza a fluir hacia el interior del depósito, a una velocidad de 6 l/min. La solución dentro del depósito se mantiene bien agitada y fluye hacia el exterior a una velocidad de 5 l/min. Si la concentración de sal en la salmuera que entra en el depósito es de 1 kg/l, determinemos la concentración de sal en el tanque en función del tiempo.

Solución. Sea $x(t)$ la cantidad de sal (en kg) en el tanque en un instante t. La concentración de sal en un instante t en el tanque será la cantidad de sal que hay en el tanque en dicho instante dividido por el volumen total de agua. En este caso, el volumen de agua en el tanque no es constante, ya que la velocidad de entrada y salida del fluido no es la misma, pues entra más agua que sale. Sea $y(t)$ el volumen (en litros) añadido al depósito en un instante t. Entonces, la velocidad de entrada y salida de sal vendrá dada por

$$\begin{aligned} v_e &= 1 \text{ kg/l} \times 6 \text{ l/min}, \\ v_s &= \frac{x(t)}{1000 + y(t)} \text{ kg/l} \times 5 \text{ l/min}. \end{aligned}$$

Puesto que entran 6 l/min y salen 5 l/min, tenemos que cada minuto se añade 1 litro de agua al tanque, por tanto $y(t) = t$. Con estos datos, la variación de sal en el tanque vendrá dada por la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = v_e - v_s = 6 - \frac{5x}{1000 + t}$$

con la condición inicial $x(0) = 0$, pues en el instante inicial el depósito no tenía sal.

Resolvemos esta ecuación lineal:

$$x' + \frac{5}{1000 + t} x = 6.$$

Hallamos el factor integrante:

$$\mu(t) = e^{\int \frac{5}{1000+t} dt} = (1000 + t)^5$$

y obtenemos la solución:

$$x(t) = (1000 + t) + \frac{C}{(1000 + t)^5}.$$

Como $x(0) = 0$, sustituimos y obtenemos que $C = -1000^6$, por tanto:

$$x(t) = (1000 + t) - \frac{1000^6}{(1000 + t)^5}$$

es la cantidad de sal en el tanque en un instante t y la concentración será:

$$C(t) = \frac{x(t)}{1000 + t} = 1 - \frac{1000^6}{(1000 + t)^6} \text{ kg/litro.} \quad \blacksquare$$

2.6.5. Desintegración de sustancias radiactivas

La rapidez de desintegración de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad presente de dicha sustancia, lo que nos lleva a la ecuación diferencial:

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda\, A, \quad \lambda > 0,$$

donde $A(t)$ es la cantidad de sustancia presente en un instante t y λ es una constante de proporcionalidad que depende de la sustancia. El signo negativo en la ecuación se debe a que la cantidad de materia va disminuyendo a medida que el tiempo crece.

Se llama **vida media** o **periodo de semidesintegración** a una medida de la estabilidad de una sustancia radiactiva. La vida media es el tiempo necesario para que se desintegren la mitad de los núcleos de una cantidad inicial A_0 de dicha sustancia. Cuanto más larga es la vida media de un elemento, más estable es.

⬢ **Ejemplo 2.24.** Un reactor nuclear transforma el Uranio 238, que es relativamente estable, en el isótopo Plutonio 239. Después de 15 años se determina que el 0.043 % de la cantidad inicial A_0 de Plutonio se ha desintegrado. Determinemos el periodo de semidesintegración de este isótopo si la velocidad de desintegración es proporcional a la cantidad restante.

Solución. Sea $A(t)$ la cantidad de Plutonio existente en un instante t (años). Como hemos visto, la ecuación diferencial que describe este proceso es:

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda A, \quad \lambda > 0,$$

con las condiciones adicionales $A(0) = A_0$ y $A(15) = A_0 - \frac{0{,}043 A_0}{100}$, que nos permitirán hallar λ y la constante de integración. Resolviendo esta ecuación separable tenemos la solución:

$$A(t) = Ce^{-\lambda t}.$$

Sustituyendo la condición $A(0) = A_0$, se tiene:

$$A_0 = Ce^0, \quad \text{por tanto:} \quad C = A_0.$$

Sustituyendo el dato $A(15) = \frac{99{,}957}{100} A_0$, se tiene:

$$0{,}99957 A_0 = A_0 e^{-15\lambda}, \quad \text{por tanto:} \quad \lambda = 2867 \cdot 10^{-8}.$$

Por tanto, la solución de la ecuación diferencial es:

$$A(t) = A_0 e^{-2867 \cdot 10^{-8} t}.$$

Esta solución nos proporciona la cantidad de materia existente al cabo de t años. Por definición, el periodo de semidesintegración será un valor τ tal que $A(\tau) = \frac{A_0}{2}$; por ello, sustituimos en la ecuación:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-2867 \cdot 10^{-8} \tau}$$

y despejamos el tiempo τ:

$$\tau \simeq 24180 \text{ años.} \quad \blacksquare$$

En general, para cualquier sustancia radiactiva, se tiene que el periodo de semidesintegración será un valor τ que verifique:

$$\frac{A_0}{2} = A_0 e^{-\lambda\tau}, \quad \text{por tanto:} \quad \ln 2 = \lambda\tau, \quad \text{es decir:} \quad \lambda = \frac{\ln 2}{\tau}.$$

A λ se le conoce como **constante radiactiva**. Cuanto mayor es su valor más radiactivo es el elemento.

2.6.6. Determinación de edades por el método del carbono 14

Alrededor de 1950, el químico Willard Libby ideó un método en el cual se usa carbono radiactivo para determinar la edad de los fósiles. La teoría se basa en que el isótopo carbono 14 (14C) se produce en la atmósfera por la acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. El cociente de la cantidad de 14C y la cantidad de carbono ordinario 12C presentes en la atmósfera es constante y, en consecuencia, la proporción de isótopo presente en los organismos vivos es la misma que en la atmósfera. Cuando un organismo muere, la absorción del 14C cesa. Comparando la proporción de 14C que hay en un fósil con la proporción constante encontrada en la atmósfera es posible obtener una estimación razonable de su edad. El método se basa en que el período de semidesintegración del 14C es de aproximadamente 5600 años. Por su trabajo, Libby ganó el premio Nobel de Química en 1960. El método de Libby ha sido utilizado para determinar la antigüedad del mobiliario de madera hallado en las tumbas egipcias, así como la de las envolturas de lienzo de los manuscritos del Mar Muerto.

⬢ **Ejemplo 2.25.** Se ha encontrado que un hueso fosilizado contiene 1/1000 de la cantidad original de carbono 14. Determinemos la edad del fósil.

Solución. Sea $A(t)$ la cantidad de 14C presente en un instante t (años) y sea $A(0) = A_0$ la cantidad inicial de 14C que tenía el fósil. Consideramos la ecuación diferencial:

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda A, \quad \lambda > 0$$

cuya solución es:

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t},$$

con $\lambda = \dfrac{\ln 2}{\tau}$.

Como actualmente se tiene una cantidad de $\frac{1}{1000}A_0$ de 14C, sustituyendo en la solución podemos despejar el tiempo transcurrido:

$$\frac{1}{1000}A_0 = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{5600}t},$$

por tanto:

$$-\ln 1000 = -\frac{\ln 2}{5600}t,$$

de donde despejamos el tiempo:

$$t = \frac{3\ln 10}{\ln 2}5600.$$

La edad del fósil es de aproximadamente 55808 años. ■

Ejemplo 2.26. Una muestra de carbón encontrada en Stonehenge resultó contener un 63 % del 14C de una muestra actual de la misma masa. Veamos cuál es la edad de la muestra de Stonehenge.

Solución. Sea $A(t)$ la cantidad de 14C presente en un instante t (años) y sea $A(0) = A_0$ la cantidad inicial de 14C que tenía la muestra encontrada. De nuevo consideramos la ecuación diferencial:

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda A, \quad \lambda > 0,$$

cuya solución hemos visto en el ejemplo anterior viene dada por

$$A(t) = A_0 e^{-\lambda t},$$

con $\lambda = \dfrac{\ln 2}{\tau}$.

Como actualmente se tiene una cantidad de $\frac{63}{100}A_0$ de 14C, sustituyendo en la solución podemos despejar el tiempo transcurrido y conocer la edad del carbón:

$$\frac{63}{100}A_0 = A_0 e^{-\frac{\ln 2}{5600}t},$$

$$\ln 63 - \ln 100 = -\frac{\ln 2}{5600}t$$

y despejamos t:

$$t = \frac{2\ln 10 - \ln 63}{\ln 2}5600 \simeq 3800 \text{ años.}$$ ■

2.6.7. Crecimiento de poblaciones

Para estudiar el crecimiento de poblaciones se pueden seguir diferentes modelos. Por ejemplo, el modelo malthusiano o exponencial se basa en que la tasa de crecimiento es proporcional a la población; por tanto, está descrito por una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = k\,x, \quad k > 0,$$

Un modelo de poblaciones más realista es el modelo logístico donde se supone que existe una tasa de mortalidad debida a factores externos, llegándose a la ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = x(a - bx), \quad x(0) = x_0.$$

Ejemplo 2.27. En 1790 Estados Unidos tenía una población de 3.93 millones de personas y en 1800 de 5.31 millones. Usando el modelo exponencial, estimemos la población de EEUU en función del tiempo.

Solución. Sea $x(t)$ *la* población de EEUU en un instante t (años). La solución de la ecuación diferencial separable

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

es:

$$x(t) = Ce^{kt}.$$

Para el instante inicial $t = 0$, correspondiente al año 1970, se tiene que $x(0) = 3{,}93$ millones. Para el instante $t = 10$, correspondiente al año 1800, $x(10) = 5{,}31$ millones. Estos datos nos permiten calcular las constantes C y k :

$$x(0) = C = 3{,}93$$
$$x(10) = 5{,}31 = 3{,}93e^{10k}, \quad \text{de donde:} \quad k = \tfrac{1}{10}\ln\tfrac{5{,}31}{3{,}93} \simeq 0{,}03.$$

Por tanto, la expresión que nos da la población de EEUU en función del tiempo es:

$$x(t) = 3{,}93e^{0{,}03t}. \blacksquare$$

Ejemplo 2.28. Un estudiante portador de un virus de gripe regresa a un campus universitario aislado que tiene 1000 estudiantes. Al cabo de 4 días hay 50 estudiantes contagiados. Si se supone que la rapidez con la que el virus se propaga es proporcional al número de estudiantes contagiados y al número de alumnos no contagiados, determinemos el número de estudiantes contagiados que habrá después de 6 días.

Solución. Sea $x(t)$ el número de alumnos contagiados al cabo de t días. Puesto que la rapidez con la que el virus se propaga es proporcional al número x de estudiantes contagiados y también al número de alumnos no contagiados, $1000 - x$, la ecuación diferencial para este problema será de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = k\,x(1000 - x).$$

Esta ecuación es de variables separables:

$$\frac{dx}{x(1000 - x)} = k\,dt.$$

Integrando ambos lados:

$$\frac{1}{1000}\ln\left|\frac{x}{1000 - x}\right| = k\,t + C_1,$$

$$\ln\left|\frac{x}{1000 - x}\right| = 1000k\,t + C_2, \;\; C_2 = 1000C_1,$$

$$\frac{x}{1000 - x} = Ce^{1000k\,t}, \;\; C = e^{C_2}.$$

Consideremos ahora las condiciones adicionales. En el instante inicial sólo había un estudiante contagiado, por tanto $x(0) = 1$ y sustituyendo se tiene:

$$\frac{1}{999} = C.$$

Al cabo de cuatro días, hay 50 estudiantes contagiados, es decir, $x(4) = 50$, sustituyendo:

$$\frac{50}{1000 - 50} = \frac{1}{999} e^{4000k}$$

de donde despejando k se tiene:

$$k = 0{,}99 \cdot 10^{-3}.$$

Por tanto, la solución (implícita) de la ecuación diferencial es:

$$\frac{x}{1000 - x} = \frac{1}{999} e^{0{,}99t}.$$

Para hallar el número de alumnos contagiados al cabo de 6 días, sustituimos $t = 6$ y despejamos x :

$$\frac{x(6)}{1000 - x(6)} = \frac{1}{999} e^{0{,}99 \cdot 6} = 0{,}38,$$

$$x(6) = 380 - 0{,}38\ x(6),$$

$$1{,}38\ x(6) = 380,$$

por tanto:

$$x(6) = \frac{380}{1{,}38} \simeq 275 \text{ estudiantes.} \quad \blacksquare$$

Ejercicios de la sección 4.5

1. Halla la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas dada por:

   (a) $y^2 - x^2 + 4xy - 2Cx = 0.$

   (b) $x^2 + 2y^2 = \dfrac{C}{x^2}.$

   (c) $x^2 - 2yx - y^2 = C.$

   (d) $2x^2 + y^2 = 4Cx.$

   (Solución: (a) $y^3 + 3yx^2 + 4x^3 = C.$
   (b) $\ln |y| - \frac{x^2}{2y^2} = C.$
   (c) $y^2 - 2xy - x^2 = C.$
   (d) $y = Ce^{-x^2/y^2}$).

2. Halla el miembro de la familia de trayectorias ortogonales a la familia

$$x + y = Ce^y,$$

que pasa por el punto $(0, 5)$.

(Solución: $y = 3e^{-x} - x + 2$).

3. Supongamos que un paracaidista de masa 80 kg se lanza desde un avión y que su paracaídas se abre en el instante $t = 0$ cuando su velocidad es $v(0) = 10$ m/sg. Calcula la velocidad del paracaidista en un instante $t > 0$ sabiendo que la resistencia al aire es proporcional al cuadrado de la velocidad. (La constante de proporcionalidad es $k = 4$ kg/sg, y tomemos $g = 10$ m/sg^2). (Solución: $v(t) = 10\sqrt{2}(5{,}82846e^{\sqrt{2}t} - 1)/(1 + 5{,}82846e^{\sqrt{2}t})$).

4. Lanzamos un objeto de masa 75 kg desde una altura de 1000 m con una velocidad inicial de 10 m/sg. Suponemos que la fuerza gravitacional es constante y que la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad, con constante de proporcionalidad $k = 30$ kg/sg. (a) ¿En qué instante t su velocidad será el doble de la velocidad inicial?. (b) ¿Cuánto tardará en llegar al suelo? (Solución: (a) $t = 2{,}74653$ sg. (b) $t = 41{,}5$ sg).

5. Un paracaidista cae hacia la superficie terrestre partiendo del reposo. La masa total del hombre y del equipo es de 100 Kg. Antes de que se abra el paracaídas la resistencia del aire (en Newtons) es de $5v$, siendo v la velocidad en m/sg. Después de abierto el paracaídas la resistencia del aire es de $36v^2$. Si el paracaídas se abre a los 5 segundos de iniciada la caída, calcula la velocidad del paracaidista en función del tiempo. (Solución: $v(t) = (-15{,}6325 - 19{,}8787e^{3{,}76t})/(3 - 3{,}81e^{3{,}76t})$).

6. Una salmuera que contiene inicialmente 2 kg de sal por litro, fluye hacia el interior de un tanque inicialmente lleno con 500 litros de agua que contienen 50 kg de sal. La salmuera entra en el tanque a una velocidad de 6 l/min. La mezcla, que se mantiene uniforme por medio de agitación, está saliendo del tanque a razón de 5 l/min.

   a) Calcula la concentración de sal en el tanque al cabo de 10 minutos.

   b) Transcurridos 10 minutos, se presenta una fuga en el tanque que ocasiona que salga de él un litro adicional por minuto. ¿Cúal será la concentración de sal contenida en el tanque al cabo de 20 minutos?

   (Solución: (a) 0,3128 kg/l. (b) 0,5001 kg/l).

7. Una habitación que contiene 24 m^3 de aire se encuentra inicialmente libre de monóxido de carbono. En el instante $t = 0$ entra en la habitación humo de cigarrillos con un contenido del 0,4 % al ritmo de 0,024 m^3/min. La mezcla homogeneizada sale del local al mismo ritmo. Calcula el tiempo que se tarda en obtener una concentración del 0,012 % de monóxido de carbono en el local. (Solución: 35,6675 min).

8. En un tanque con 2000 l de agua entran 10 l/min de agua conteniendo 2 kg/l de sal disuelta y salen 10 l/min hacia el exterior. Determina la cantidad de sal que hay en el tanque en cada instante t. ¿Cuándo alcanzará la concentración de sal en el tanque 1/2 kg/l? (Solución: 57,536 min).

9. Un tanque cuya capacidad es de 1000 l contiene inicialmente 250 l de agua en la que se encuentran disueltos 10 kg de sal. Una solución con sal conteniendo 0.3 kg/l de sal entra en el tanque a una velocidad de 15 l/min y la mezcla, bien agitada, abandona el tanque a una velocidad de 5 l/min. (a) Halla la cantidad de sal que hay en el tanque en un instante t. (b) ¿Qué cantidad de sal hay en el tanque justo en el momento antes de que éste comience a desbordarse? (Solución: (a) $x(t) = 0{,}3(250 + 10t) - 325\sqrt{10}(250 + 10t)^{-1/2}$). (b) 267,5 kg).

10. Un lago tiene un volumen de 458 km^3. Los flujos de entrada y salida se realizan ambos a razón de 175 km^3 por año. En un determinado momento una fábrica vierte sus residuos en él, siendo la concentración de contaminantes en dicho momento de 0.05 %. A partir de ese momento la concentración de contaminantes que ingresa es de 0.01 %. Suponiendo que el agua se mezcla homogéneamente dentro del lago, ¿cuánto tiempo pasará para que la concentración de contaminantes en el lago se reduzca al 0.02? (Solución: $t \approx 63$ años).

11. En una cueva de Sudáfrica se encontró un cráneo humanoide junto con los restos de una fogata. Los arqueólogos creen que la edad del cráneo es igual a la de la fogata. Se ha establecido que solamente un 2 % de la cantidad original de 14C queda en la madera quemada en la fogata. Calcula la edad aproximada del cráneo. (Solución: $t \simeq 31605{,}5$ años).

12. La vida media del cobalto radioactivo es de 5270 años. Supóngase que un accidente nuclear ha dejado que el nivel de cobalto radioactivo ascienda en cierta región a 100 veces el nivel aceptable para la vida humana. ¿Cuánto tiempo pasará para que la región vuelva a ser habitable? (Ignoramos la posible presencia de otros elementos radioactivos). (Solución: $t \simeq 35{,}02$ años).

13. Supongamos que partimos de una cantidad inicial de fermento de levadura de 2 gr y al cabo de 2 horas es de 2,3 gr. ¿Cuánto fermento habrá al cabo de 6 horas de comenzar la fermentación si la velocidad con la que crece el fermento es proporcional a la cantidad inicial? (Solución: 3,04340 gr).

14. Consideremos que la rapidez con que crece un cierto rumor entre una población es proporcional al número de individuos que conocen la noticia por el número de individuos que no la conocen. Supongamos que en el instante $t = 0$, la mitad de una población de 100000 personas han oído cierto rumor y que el número de las que lo han oído crece en ese momento

a razón de 1000 personas por día. ¿Cuánto tiempo pasará para que el rumor se extienda al 80 % de la población? (Solución: $t \simeq 34{,}66$ días).

15. Sea $P(t)$ la población de una determinada ciudad en un instante t, cuya variación viene modelizada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \delta)P,$$

siendo β y δ los índices de natalidad y mortalidad respectivamente. Consideramos que dicha ciudad tenía una población de 1,5 millones en 1980. Supongamos que ésta crece continuamente a razón del 4 % anual ($\beta - \delta = 0{,}04$) y también que absorbe 50000 recién llegados por año. ¿Cuál será la población en el año 2000? (Solución: $t \simeq 4{,}87$ millones).

16. Una población $P(t)$ de pequeños roedores tiene un índice de natalidad $\beta = 0{,}001P$ (nacimientos por mes y por roedor) y un índice de mortalidad δ constante. Si $P(0) = 100$ y $P'(0) = 8$, ¿cuánto tiempo (en meses) tardará esta población en duplicarse a 200 roedores? (Calculad primero el valor de δ).(Solución: $t \simeq 5{,}89$ meses).

17. Un pastel es retirado del horno a 210 °F dejándose enfriar a la temperatura ambiente de 70 °F. Después de 30 minutos la temperatura del pastel es de 140 °F, ¿cuándo estará a 100 °F? (Solución: 66 min 40 seg).

18. Justo antes del mediodía el cuerpo de una víctima, aparentemente de homicidio, se encuentra en un cuarto que se conserva a temperatura constante a 69,8 °F. Al mediodía la temperatura del cuerpo es 79,8 °F y a la 1 pm es de 74,8 °F. Si se supone que la temperatura del cuerpo en el momento de la muerte era de 98,6 °F y que se ha enfriado de acuerdo con la *ley de Newton*. ¿Cuál es la hora del crimen? (Solución: 10 horas 28 min).

19. Un escalador sale de su campamento base a las 6 de la mañana. A medida que asciende, la fatiga y la falta de oxígeno hacen que la rapidez con la que aumenta su elevación sea inversamente proporcional a la distancia que sube. A las 12 del mediodía está a una altura de 5700 m y a las 2 de la tarde ha llegado a la cima de la montaña, que está a 6000 m. ¿A qué altura se encuentra el campamento base? (Solución: 4686,1498 m).

TEMA 3

Ecuaciones lineales de segundo orden y de orden superior

En general, las ecuaciones diferenciales de orden mayor que uno son muy difíciles de resolver, aunque para casos especiales se conocen sustituciones que transforman la ecuación original en otra ecuación que puede resolverse por medio de funciones elementales, elípticas o algún otro tipo de función especial. Sin embargo, la teoría de las ecuaciones lineales resulta sencilla ya que admite una formalización algebraica y su resolución resulta inmediata en el caso de que los coeficientes de la ecuación sean constantes.

La ecuaciones diferenciales lineales de orden mayor que uno surgen al modelizar muchos problemas de ingeniería: muelles elásticos, caída de cuerpos, flujo de corrientes eléctricas, etc. También resultan útiles para obtener aproximaciones de las soluciones de los sistemas no lineales.

En este tema vamos a estudiar las ecuaciones diferenciales lineales y sus aplicaciones, así como métodos para su resolución.

Los objetivos concretos de este tema son:

- Conocer la teoría de las ecuaciones diferenciales lineales de orden dos y generalizar este estudio a orden n.

- Resolver ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

- Estudiar aplicaciones donde surgen este tipo de ecuaciones.

3.1. Introducción

Comenzamos este tema modelizando el movimiento de un péndulo simple. Aunque este problema nos lleva a una ecuación de segundo orden que no es lineal y no sabemos hallar una solución explícita, sí podemos aproximar dicha ecuación a una ecuación lineal que será sencilla de resolver.

Un péndulo simple consta de una masa m suspendida por un cable, de longitud l y masa despreciable, de modo que el cable se mantiene siempre recto y la masa queda libre oscilando en un plano vertical. Con estas condiciones, queremos describir la posición de la masa en cada instante, $\alpha(t)$, siendo α el ángulo que forma el cable con la vertical (ver Figura 3.1).

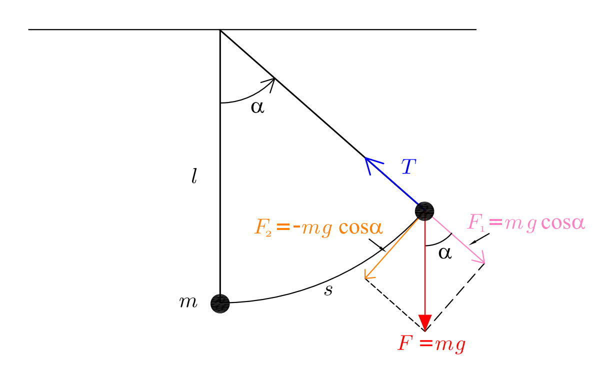


Figura 3.1: Fuerzas que intervienen en el péndulo simple.

La ecuación que rige el movimiento del péndulo se determina a partir de la ley de Newton $\vec{F} = m\,\vec{a}$. Puesto que la masa se desplaza sobre una circunferencia de radio l, la fuerza resultante $\vec{F}$ es un vector que actúa a lo largo de dicha circunferencia, es decir, tangente a ella. Por tanto, $\vec{a} = \dfrac{d^2 s}{dt^2}$, donde s es la longitud de arco que indica la posición de la masa (respecto de la vertical).

Las fuerzas que actúan sobre el péndulo son:

- La tensión, $\vec{T}$, dirigida hacia arriba en la dirección del cable.
- El peso de la masa, en la dirección de la vertical y dirigido hacia abajo, de módulo mg. La fuerza ejercida por el peso de la masa tiene dos componentes:
  - $\vec{F}_1$: de módulo igual al de $\vec{T}$, pero con sentido opuesto; por tanto, se cancela con $\vec{T}$.
  - $\vec{F}_2$: tangente a la trayectoria y con dirección opuesta al movimiento. Su módulo es $F_2 = -mg \sin\alpha$.

La fuerza resultante que actúa sobre el péndulo es $\vec{F}_2$. Consideremos $\alpha > 0$ a la derecha de la vertical, entonces:

$$F_2 = -mg\sin\alpha = m\frac{d^2 s}{dt^2} = ml\frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

y la ecuación diferencial que modeliza el problema queda en la forma siguiente:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\alpha = 0.$$

Esta ecuación es difícil de resolver: es un ejemplo de ecuación no lineal.

En la práctica, cuando se presenta una ecuación diferencial no lineal es útil estudiar la linealización de la ecuación que consiste en aproximarla mediante una ecuación lineal. En este caso, se observa que para valores pequeños de α se tiene que $\sin\alpha \approx \alpha$ y así obtenemos la ecuación lineal:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0. \tag{3.1}$$

Para oscilaciones pequeñas del péndulo, las soluciones determinadas a partir de (3.1) serán una buena aproximación de las soluciones reales.

Para resolver esta ecuación lineal estamos buscando una función $\alpha(t)$ con la propiedad de que su segunda derivada sea igual a una constante negativa por la propia función. Una solución podría ser $\alpha(t) = \cos\omega t$ o bien $\alpha(t) = \sin\omega t$, para una constante ω adecuada. Sustituyendo $\alpha(t) = \cos\omega t$ en (3.1) tenemos:

$$-\omega^2 \cos\omega t + \frac{g}{l}\cos\omega t = 0, \text{ es decir, } (\frac{g}{l} - \omega^2)\cos\omega t = 0.$$

Eligiendo $\omega^2 = \frac{g}{l}$ se tiene que $\alpha_1(t) = \cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$ es una solución de (3.1). Análogamente, $\alpha_2(t) = \sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t)$ es también solución de (3.1). Dado que (3.1) es una ecuación lineal, cualquier combinación de la forma:

$$\alpha(t) = C_1\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}t) + C_2\sin(\sqrt{\frac{g}{l}}t) \tag{3.2}$$

es solución, con C_1 y C_2 constantes arbitrarias. Como veremos en el Teorema 3.3 toda solución de (3.1) será de la forma (3.2).

Conociendo el desplazamiento inicial $\alpha(0)$ y la velocidad angular inicial $\alpha'(0)$ es posible determinar C_1 y C_2. Obtenemos así las soluciones particulares que describen el movimiento para cada condición inicial.

Como el periodo de $\cos\omega t$ y $\sin\omega t$ es $\frac{2\pi}{\omega}$, entonces el periodo de oscilación del péndulo es:

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{g}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

El movimiento descrito en la ecuación (3.2) se llama **movimiento armónico simple**.

3.2. Ecuaciones lineales de segundo orden

Una **ecuación diferencial lineal de orden 2** es de la forma:

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = b(x). \tag{3.3}$$

Si los coeficientes $a_i(x)$ son constantes, se dice que la ecuación es de **coeficientes constantes**; en caso contrario se llama ecuación de **coeficientes variables**.

Si $b(x) \equiv 0$, se dice que la ecuación es **homogénea**. Si $b(x) \neq 0$, se llama **ecuación no homogénea** y el término $b(x)$ se denomina **término no homogéneo**.

Restringimos el estudio de la ecuación a los intervalos donde los coeficientes son funciones continuas. Es decir, asumimos que $a_2(x)$, $a_1(x)$, $a_0(x)$ y $b(x)$ son continuas en algún intervalo $]a, b[$. Suponiendo además que $a_2(x) \neq 0$ en dicho intervalo, podemos expresar la ecuación (3.3) en forma canónica:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = g(x) \tag{3.4}$$

con $p(x)$, $q(x)$ y $g(x)$ continuas en $]a, b[$.

Bajo estas condiciones, el problema de valor inicial tiene solución única:

■ **Teorema 3.1.** Sean $p(x)$, $q(x)$, $g(x)$ funciones continuas en algún intervalo $]a, b[$ que contiene al punto x_0; entonces, para cualquier elección de los valores y_0, y_1 existe una única solución del problema de valor inicial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x), \quad \text{sujeto a } y(x_0) = y_0,\; y'(x_0) = y_1.$$

⬣ **Ejemplo 3.1.** Determinemos el máximo intervalo para el cual el teorema anterior nos asegura la existencia y unicidad de una solución del problema de valor inicial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x-3}\frac{dy}{dx} + \sqrt{x}\, y = \ln x, \qquad \begin{array}{r} y(1) = 3 \\ y'(1) = -5. \end{array}$$

Solución. $p(x) = \dfrac{1}{x-3}$ es continua en $\mathbb{R} - \{3\}$, $q(x) = \sqrt{x}$ es continua en $[0, +\infty[$ y $g(x) = \ln x$ es continua en $]0, +\infty[$; por tanto, el mayor intervalo abierto que contiene a $x_0 = 1$ y donde las tres funciones son continuas a la vez es $]0, 3[$. ■

3.2.1. Ecuaciones lineales homogéneas

■ **Definición 3.1.** Asociada a la ecuación (3.4) se tiene la siguiente ecuación:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \tag{3.5}$$

llamada **ecuación homogénea** asociada a la ecuación no homogénea (3.4).

A partir del término de la izquierda de la ecuación (3.5), definimos el operador:

$$L[y] = y'' + py' + qy,$$

llamado **operador diferencial**.

Entonces, la ecuación (3.5) puede expresarse de la forma:

$$L[y](x) = 0. \tag{3.6}$$

El operador diferencial es un operador lineal, ya que:

$$L[y_1(x) + y_2(x)] = L[y_1(x)] + L[y_2(x)],$$
$$L[Cy(x)] = CL[y(x)].$$

Debido a la linealidad de L, si $y_1(x)$ e $y_2(x)$ son soluciones de (3.6), entonces cualquier combinación lineal $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ también es solución:

■ **Teorema 3.2.** Sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluciones de la ecuación lineal homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3.7}$$

Entonces, cualquier combinación lineal $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, con C_1, C_2 constantes arbitrarias, también es solución de (3.7).

Demostración. Sea $L[y] = y'' + p(x)y' + q(x)y$. Como y_1 e y_2 son soluciones de (3.7) se verifica:

$$L[y_1] = L[y_2] = 0.$$

Veamos si $C_1y_1 + C_2y_2$ también es solución. Dado que L es un operador lineal se cumple:

$$L[C_1y_1 + C_2y_2] = C_1L[y_1] + C_2L[y_2] = C_10 + C_20 = 0,$$

luego $C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$ es solución. ■

Ejemplo 3.2. Dadas las funciones $y_1(x) = e^{2x}\cos(3x)$ e $y_2(x) = e^{2x}\sin(3x)$, soluciones de la ecuación diferencial $y'' - 4y' + 13y = 0$, hallemos la solución de dicha ecuación diferencial de segundo orden que verifica las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = -5$.

Solución. Como consecuencia de la linealidad toda combinación de estas soluciones, $y(x) = C_1e^{2x}\cos(3x) + C_2e^{2x}\sin(3x)$, también es solución de dicha ecuación. Buscaremos C_1 y C_2 adecuadas para que se verifiquen las condiciones iniciales dadas. Para ello, calculamos $y'(x)$:

$$y'(x) = C_1(2e^{2x}\cos(3x) - 3e^{2x}\sin(3x)) + C_2(2e^{2x}\sin(3x) + 3e^{2x}\cos(3x))$$

y sustituimos las condiciones dadas:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 = 2 \\ y'(0) &= 2C_1 + 3C_2 = -5 \to C_2 = -3. \end{aligned}$$

Por tanto, la solución del problema de valor inicial es:

$$y(x) = 2e^{2x}\cos(3x) - 3e^{2x}\sin(3x). \ ■$$

Como se ha visto, dadas dos soluciones de una ecuación lineal de orden dos, cualquier combinación lineal de ellas también lo es. Nos preguntamos si existen otras soluciones no incluidas en dicha combinación lineal.

Consideremos una ecuación homogénea sencilla:

$$y'' - y = 0. \tag{3.8}$$

Las funciones $y_1 = e^x$ e $y_2 = e^{-x}$ son dos soluciones de esta ecuación diferencial. Por el teorema anterior, sabemos que toda combinación lineal de la forma $C_1e^x + C_2e^{-x}$ también es solución. Supongamos ahora que $\phi(x)$ es otra

solución de (3.8) y tomamos un valor fijo $x_0 \in \mathbb{R}$. Si existen C_1 y C_2 constantes tales que ambas funciones y sus derivadas coincidan en x_0, entonces:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C_1 e^{x_0} + C_2 e^{-x_0} & = & \phi(x_0), \\ C_1 e^{x_0} - C_2 e^{-x_0} & = & \phi'(x_0), \end{array} \right. \tag{3.9}$$

y tendremos dos soluciones $\phi(x)$ y $C_1 e^x + C_2 e^{-x}$ que satisfacen las mismas condiciones iniciales en x_0, luego, por el teorema de existencia y unicidad, ambas soluciones deben ser iguales:

$$\phi(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} \qquad \forall x,$$

es decir, cualquier otra solución de la ecuación está incluida en esta combinación lineal.

Para que existan C_1 y C_2 verificando el sistema (3.9), éste ha de ser un sistema compatible determinado y la condición para que esto ocurra (por el Teorema de Rouche Frobenius) es que:

$$\left| \begin{array}{cc} e^{x_0} & e^{-x_0} \\ e^{x_0} & -e^{-x_0} \end{array} \right| \neq 0.$$

Para este caso concreto, hemos visto que dadas dos soluciones particulares toda solución se puede expresar como combinación lineal de ellas.

En general, esta propiedad se cumple para ecuaciones lineales de orden dos, si las soluciones dadas, y_1 e y_2 satisfacen determinada condición que vemos en el siguiente teorema.

■ **Teorema 3.3.** Sean y_1 e y_2 soluciones en un intervalo $]a, b[$ de la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.10}$$

con p y q funciones continuas en $]a, b[$. Si en algún punto x_0 de $]a, b[$ se satisface:

$$\left| \begin{array}{cc} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{array} \right| \neq 0 \tag{3.11}$$

entonces, toda solución de (3.10) se expresa de la forma

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \tag{3.12}$$

con C_1 y C_2 constantes.

Dadas dos soluciones y_1 e y_2 verificando el teorema anterior, se dice que $\{y_1(x), y_2(x)\}$ es un **conjunto fundamental de soluciones** de (3.10).

La combinación lineal dada por (3.12) es la **solución general** de (3.10).

Dadas dos funciones diferenciables y_1 e y_2, se denomina **wronskiano** de y_1 e y_2 a la función dada por:

$$W[y_1, y_2](x) = \left| \begin{array}{cc} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{array} \right|.$$

Luego una pareja de soluciones y_1 e y_2 de una ecuación diferencial lineal (3.10) en un intervalo $]a,b[$ es un conjunto fundamental de soluciones si se cumple que $W[y_1,y_2](x_0)\neq 0$, para algún $x_0\in]a,b[$.

Por tanto, resolver la ecuación (3.10) consiste en hallar un conjunto fundamental de soluciones $\{y_1(x),y_2(x)\}$ que nos proporcionará la solución general (3.12).

Ejemplo 3.3. Las funciones $y_1(x)=\cos(3x)$ e $y_2(x)=\sin(3x)$ son soluciones de la ecuación diferencial $y''+9y=0$ en el intervalo $]-\infty,+\infty[$. Hallemos la solución general de dicha ecuación diferencial.

Solución. Veamos que estas dos funciones son linealmente independientes. Para ello, comprobamos si el wronskiano es distinto de cero en algún punto:

$$W[y_1,y_2](x)=\begin{vmatrix}\cos(3x) & \sin(3x)\\ -3\sin(3x) & 3\cos(3x)\end{vmatrix}=3\neq 0,\quad \forall x\in\mathbb{R},$$

en particular existe un $x_0\in\mathbb{R}$ donde el wronskiano es distinto de cero, luego son linealmente independientes. Se trata, por tanto de un conjunto fundamental de soluciones y la solución general es:

$$y(x)=C_1\cos(3x)+C_2\sin(3x).\ \blacksquare$$

Definición 3.2. Dos funciones y_1 e y_2 se dice que son **linealmente dependientes** en un intervalo $]a,b[$ si existen constantes C_1 y C_2, que no se anulan simultáneamente, tales que:

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)=0,\quad \forall x\in(a,b).$$

Por tanto,

Definición 3.3. Dos funciones y_1 e y_2 son **linealmente independientes** en $]a,b[$ si existe algún $x_0\in]a,b[$ donde se verifica:

$$C_1y_1(x_0)+C_2y_2(x_0)\neq 0.$$

Luego la condición (3.11) es equivalente a exigir que y_1 e y_2 sean funciones linealmente independientes en $]a,b[$.

Esta definición se extiende de modo natural para más funciones.

Ejemplo 3.4. Determinemos si las funciones $y_1(x)=e^x$ e $y_2(x)=e^{-2x}$ son linealmente dependientes o independientes en $\mathbb{R}$.

Solución. Veamos si verifica la condición (3.11):

$$\begin{vmatrix}e^{x_0} & e^{-2x_0}\\ e^{x_0} & -2e^{-2x_0}\end{vmatrix}=-2e^{-x_0}-e^{-x_0}=-3e^{-x_0}\neq 0,\quad \forall x_0\in\mathbb{R},$$

en particular existe un $x_0\in\mathbb{R}$ donde el wronskiano es distinto de cero, luego son linealmente independientes. $\blacksquare$

Cuando tratamos con funciones que son solución de una ecuación diferencial de la forma (3.10), se tiene el siguiente resultado:

Teorema 3.4. Si y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación diferencial lineal

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

entonces su wronskiano, $W[y_1, y_2](x)$, o bien es idénticamente nulo o bien no se anula en ningún punto de $]a, b[$.

Además,

Teorema 3.5. $W[y_1, y_2](x) \neq 0$ si y sólo si y_1 e y_2 son linealmente independientes.

Por tanto, para comprobar si dos soluciones forman un conjunto fundamental de soluciones, es decir, si son linealmente independientes, no hará falta buscar un x_0 donde se cumpla la condición (3.11), directamente veremos si el wronskiano es nulo o no.

Método de reducción del orden

Dada una ecuación diferencial lineal homogénea de orden 2, el método de reducción del orden nos permite obtener una segunda solución a partir de una solución conocida.

Sea $f(x)$ una solución conocida de la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{3.13}$$

Este método consiste en suponer que la otra solución es de la forma:

$$y(x) = v(x)\, f(x).$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación, ésta se reduce a una ecuación de primer orden separable en la variable $w = v'$. Una vez obtenida $v'(x)$, se integra y se obtiene $v(x)$. Es decir:

$$v(x) = \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[f(x)]^2} dx.$$

Si buscamos un conjunto fundamental de soluciones, elegiremos las constantes de integración de modo que $f(x)$ y $v(x)$ sean linealmente independientes.

Ejemplo 3.5. Dada la función $f(x) = e^x$ solución de la ecuación diferencial $y'' - 2y' + y = 0$, hallemos una segunda solución linealmente independiente.

Solución. Sea $y(x) = v(x)\, f(x) = v(x)\, e^x$ la nueva solución, con $v(x)$ a determinar. Entonces:

$$\begin{aligned} y' &= v\, e^x + v'\, e^x \\ y'' &= v\, e^x + 2v'\, e^x + v''\, e^x. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$v\, e^x + 2v'\, e^x + v''\, e^x - 2(v\, e^x + v'\, e^x) + v\, e^x = 0$$

y simplificando:

$$v'' = 0.$$

Sea $w = v'$, entonces:

$$w' = 0, \text{ por tanto } w(x) = C_1, \ v'(x) = C_1 \text{ y } v(x) = C_1 x + C_2,$$

de donde tenemos que la solución buscada es de la forma:

$$y(x) = (C_1 x + C_2)\, e^x.$$

Puesto que la solución ha de ser linealmente independiente de $f(x) = e^x$, hemos de tomar $C_1 \neq 0$. Así, tomando por ejemplo $C_1 = 1$ y $C_2 = 0$, una segunda solución linealmente independiente puede ser:

$$y(x) = x\, e^x. \blacksquare$$

Ejemplo 3.6. Dada la función $f(x) = x$ solución de la ecuación diferencial $y'' - 2xy' + 2y = 0$, hallemos una segunda solución linealmente independiente.

Solución. Sea $y(x) = v(x)\, f(x) = v(x)\, x$ la nueva solución, con $v(x)$ a determinar. Entonces:

$$y' = v + v'x$$
$$y'' = 2v' + v''\, x.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$2v' + v''\, x - 2x(v + v'x) + 2v\, x = 0$$

y simplificando:

$$xv'' + (2 - 2x^2)v' = 0.$$

Sea $w = v'$, entonces:

$$xw' + (2 - 2x^2)w = 0.$$

Resolvemos ahora esta ecuación de primer orden. Separando las variables, tenemos:

$$\frac{dw}{w} = \frac{2x^2 - 2}{x} dx,$$

integramos ambos lados,

$$\ln|w| = x^2 - 2\ln|x| + C_1$$

y al despejar w obtenemos:

$$w = C\frac{e^{x^2}}{x^2}.$$

Por tanto:

$$v' = C\frac{e^{x^2}}{x^2},$$

de donde tendremos:

$$v(x) = C \int \frac{e^{x^2}}{x^2} dx.$$

Puesto que esta integral no se puede hallar en términos de funciones elementales, podemos expresar $y(x)$ en términos de una integral definida:

$$y(x) = x \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2} dt$$

y aproximar los valores de $y(x)$ mediante un método numérico. Otra opción sería obtener un desarrollo en series de potencias del integrando. ■

Cálculo de un conjunto fundamental de soluciones para ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Consideremos la ecuación diferencial homogénea con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0. \qquad (3.14)$$

Puesto que los coeficientes a, b y c son funciones constantes, y por tanto son funciones continuas en $\mathbb{R}$, el Teorema de Existencia y Unicidad nos garantiza que (3.14) tiene soluciones en $\mathbb{R}$.

Buscamos un conjunto fundamental de soluciones para construir la solución general. La forma que tiene la ecuación nos sugiere que busquemos soluciones de la forma $y(x) = e^{rx}$, siendo r una constante a determinar. Para ello, derivamos esta posible solución:

$$y' = re^{rx}, \quad y'' = r^2 e^{rx}$$

y la sustituimos, junto con sus derivadas en (3.14):

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0.$$

Sacando factor común:

$$\left(ar^2 + br + c\right) e^{rx} = 0,$$

como la función exponencial siempre es distinta de cero, se ha de cumplir la siguiente condición:

$$ar^2 + br + c = 0. \qquad (3.15)$$

Luego e^{rx} será solución de (3.15) si r satisface la ecuación (3.15); a esta ecuación la llamamos **ecuación auxiliar** o **ecuación característica**. Al polinomio $p(r) = ar^2 + br + c$ se le llama **polinomio característico**.

Las raíces de la ecuación auxiliar son:

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Dependiendo de los valores de estas raíces, construimos el conjunto fundamental de soluciones:

(I) **Raíces reales y distintas**

Si $r_1 \neq r_2$ son raíces reales distintas, un conjunto fundamental de soluciones de (3.14) es

$$\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\}.$$

Entonces, la solución general es

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

El procedimiento anterior nos proporciona las soluciones y a continuación comprobamos que son linealmente independientes,

$$W\left[e^{r_1 x}, e^{r_2 x}\right] = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{r_1 x} e^{r_2 x}(r_2 - r_1) \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(II) **Raíces reales repetidas**

Si $r_1 = r_2 = r$ son raíces reales repetidas, un conjunto fundamental de soluciones de (3.14) es:

$$\{e^{rx}, \quad xe^{rx}\}.$$

Entonces, la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}.$$

En este caso, la segunda solución se ha obtenido mediante el método de reducción del orden. Comprobemos que las soluciones son linealmente independientes,

$$W\left[e^{rx}, xe^{rx}\right] = \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & e^{rx}(1+rx) \end{vmatrix} = e^{2rx} \neq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Esta construcción se generaliza para ecuaciones de cualquier orden.

⬢ **Ejemplo 3.7.** Hallemos la solución general de la ecuación $y'' + 2y' - y = 0$.

Solución. La ecuación auxiliar asociada a esta ecuación es $r^2 + 2r - 1 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = -1 + \sqrt{2}$ y $r_2 = -1 - \sqrt{2}$; por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es:

$$\{e^{(-1+\sqrt{2})x}, \ e^{(-1-\sqrt{2})x}\}$$

y la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{(-1+\sqrt{2})x} + C_2 e^{(-1-\sqrt{2})x}. \ \blacksquare$$

⬢ **Ejemplo 3.8.** Resolvamos la ecuación diferencial $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Solución. La ecuación auxiliar asociada a esta ecuación es $r^2 + 4r + 4 = 0$, cuya solución es $r = -2$ con orden de multiplicidad 2; por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es:

$$\{e^{-2x},\ x\,e^{-2x}\}$$

y la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2\, x\, e^{-2x}. \ ■$$

⬢ **Ejemplo 3.9.** Hallemos la solución general de la ecuación $y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$.

Solución. La construcción vista anteriormente se puede generalizar, en este caso, para una ecuación de orden 3. La ecuación auxiliar asociada a esta ecuación es $r^3 + 3r^2 - r - 3 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 1$, $r_2 = -1$ y $r_3 = -3$; por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es:

$$\{e^{x},\ e^{-x},\ e^{-3x}\}$$

y la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-3x}. \ ■$$

(III) **Raíces complejas conjugadas**

Si las raíces $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$ son complejas conjugadas, un conjunto fundamental de soluciones es:

$$\{e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)\}\,.$$

Entonces la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

Veamos que si las raíces de la ecuación auxiliar son $r_1 = \alpha + i\beta$ y $r_2 = \alpha - i\beta$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\{e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ e^{\alpha x}\sin(\beta x)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones.

Siguiendo el razonamiento visto para las raíces reales tenemos como soluciones $e^{r_1 x}$ y $e^{r_2 x}$. Tomemos $e^{r_1 x}$ (tomando $e^{r_2 x}$ llegaríamos a las mismas conclusiones). Utilizando la fórmula de Euler se tiene:

$$e^{r_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} e^{i\beta x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) + i\sin(\beta x))$$

y obtenemos una solución compleja:

$$z(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x) + i e^{\alpha x}\sin(\beta x).$$

A partir de ella obtenemos dos soluciones reales de la ecuación diferencial teniendo en cuenta el siguiente resultado:

■ **Lema 3.1.** Si $z(x) = u(x) + iv(x)$ es solución de la ecuación homogénea

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.16}$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, entonces, $u(x)$ y $v(x)$ son soluciones reales de dicha ecuación.

Demostración. Si $z(x)$ es solución, entonces:

$$az'' + bz' + cz = 0.$$

Sustituimos $z(x)$ junto con sus derivadas en la ecuación (3.16):

$$a(u'' + iv'') + b(u' + iv') + c(u + iv) = 0,$$

agrupamos términos:

$$(au'' + bu' + cu) + i(av'' + bv' + cv) = 0$$

e igualando la parte real y la parte imaginaria a 0, se tiene:

$$au'' + bu' + cu = 0, \quad av'' + bv' + cv = 0;$$

por tanto, $u(x)$ y $v(x)$ son soluciones reales de la ecuación diferencial. ■

⬢ **Ejemplo 3.10.** Hallemos la solución general de la ecuación $y''+2y'+5y = 0$.

Solución. La ecuación auxiliar asociada a esta ecuación es $r^2 + 2r + 5 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = -1+2i$ y $r_2 = -1-2i$; por tanto, el conjunto fundamental de soluciones es:

$$\{e^{-x} \cos(2x), \; e^{-x} \sin(2x)\}$$

y la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{-x} \cos(2x) + C_2 e^{-x} \sin(2x). \blacksquare$$

3.2.2. Ecuaciones lineales no homogéneas

Consideremos el operador lineal:

$$L[y] = y'' + py' + qy.$$

Si la función $y_1(x)$ verifica que $L[y_1](x) = g_1(x)$, quiere decir que $y_1(x)$ es solución de la ecuación diferencial no homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g_1(x).$$

Si la función $y_2(x)$ verifica que $L[y_2](x) = g_2(x)$, quiere decir que $y_2(x)$ es solución de la ecuación diferencial no homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g_2(x).$$

Puesto que L es un operador lineal se tiene que:

$$L[C_1y_1 + C_2y_2](x) = C_1L[y_1](x) + C_2L[y_2](x) = C_1g_1(x) + C_2g_2(x),$$

siendo C_1 y C_2 constantes cualesquiera. Esto nos dice que la función $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ es solución de la ecuación diferencial no homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = C_1g_1(x) + C_2g_2(x).$$

Este resultado que acabamos de ver se conoce como el **principio de superposición**.

Ejemplo 3.11. La función $y_1(x) = -\frac{x}{3} - \frac{2}{9}$ es solución de la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' - 3y = x$$

y la función $y_2(x) = \frac{e^{2x}}{5}$ es solución de la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' - 3y = e^{2x}.$$

Hallemos una solución de la ecuación diferencial

$$y'' + 2y' - 3y = 4x - 5e^{2x}.$$

Solución. Sea $L[y] = y''+2y'-3y$. Entonces $L[y_1](x) = x = g_1(x)$ y $L[y_2](x) = e^{2x} = g_2(x)$. Puesto que:

$$4x - 5e^{2x} = 4g_1(x) - 5g_2(x),$$

por el principio de superposición se tiene que:

$$L[4y_1 - 5y_2](x) = 4g_1(x) - 5g_2(x);$$

por tanto, la solución buscada es:

$$y(x) = 4g_1(x) - 5g_2(x),$$

es decir,

$$y(x) = -\frac{4x}{3} - \frac{8}{9} - e^{2x}. \blacksquare$$

Combinando el principio de superposición y la representación de las soluciones de la ecuación homogénea, se obtiene la solución general de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes no homogénea:

Teorema 3.6. Sea $y_p(x)$ una solución particular de la ecuación no homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \tag{3.17}$$

en $]a,b[$ y sean $y_1(x)$ e $y_2(x)$ dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

Entonces, la solución general de (3.17) viene dada por:

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + y_p(x), \qquad \text{con } C_1 \text{ y } C_2 \text{ constantes.}$$

Demostración. Sea $\phi(x)$ una solución cualquiera de (3.17), entonces $\phi(x)$ e $y_p(x)$ son dos soluciones de (3.17).

Por el principio de superposición se tiene que $\phi(x) - y_p(x)$ es solución de la ecuación homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) - g(x) = 0.$$

Como $\{y_1(x), y_2(x)\}$ es un conjunto fundamental de esta ecuación homogénea asociada, se cumple que la solución $\phi(x) - y_p(x)$ es combinación lineal de y_1 e y_2. Luego existirán constantes C_1 y C_2 tales que:

$$\phi(x) - y_p(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

Por tanto, la solución es:

$$\phi(x) = y_p(x) + C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x). \blacksquare$$

El procedimiento que indica el Teorema 3.6 se puede resumir de la siguiente forma:

- Hallamos la solución general de la ecuación homogénea asociada:

$$y_h(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x).$$

- Buscamos una solución particular $y_p(x)$ de la no homogénea.

- La solución general de la ecuación completa, es decir, de la no homogénea, es la suma de las dos soluciones anteriores:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x).$$

⬢ **Ejemplo 3.12.** Sabiendo que $y_p(x) = x^2$ es una solución particular de la ecuación diferencial $y'' - y = 2 - x^2$, hallemos la solución general de esta ecuación no homogénea.

Solución. Busquemos la solución general de la ecuación homogénea asociada $y'' - y = 0$. Su ecuación auxiliar es $r^2 - 1 = 0$ y sus raíces son $r = 1$ y $r = -1$. Por tanto, la solución general de la homogénea es:

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

y la solución general de la completa es:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x^2. \blacksquare$$

Ya hemos estudiado cómo hallarla solución general $y_h(x)$ de la ecuación homogénea asociada. Veamos cómo hallar una solución particular de la ecuación completa.

Cálculo de una solución particular

A continuación damos dos métodos que nos permiten encontrar una solución particular de una ecuación lineal no homogénea de segundo orden: el método de los coeficientes indeterminados y el método de variación de los parámetros.

(I) Método de los coeficientes indeterminados

Supongamos que tenemos una ecuación lineal con coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

con el término no homogéneo $g(x)$ correspondiente a una función polinómica, exponencial, seno, coseno o suma finita de éstas.

Este método consiste en hacer una suposición inicial para la solución particular con coeficientes sin especificar. La expresión supuesta se sustituye en la ecuación diferencial y se intenta determinar los coeficientes. Si no es posible determinarlos significa que no es válida la solución propuesta y debemos, por tanto, modificar la suposición inicial.

La limitación del método es que sólo suele *funcionar bien* con las ecuaciones con coeficientes constantes y cuando el término no homogéneo tiene la forma indicada.

⬣ **Ejemplo 3.13.** Hallemos una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' + 3y' + 2y = 3x + 1.$$

Solución. La parte homogénea expresada en términos de operadores lineales es:

$$L[y](x) = y'' + 3y' + 2y.$$

Buscamos una función $y_p(x)$ tal que $L[y_p](x) = 3x + 1$.

Notemos que si aplicamos L a cualquier función lineal $y_p(x) = Ax + B$, se obtiene una función lineal:

$$L[y_p](x) = 0 + 3A + 2(Ax + B) = 2Ax + (3A + 2B).$$

Igualando al término no homogéneo:

$$2Ax + (3A + 2B) = 3x + 1$$

intentamos hallar los coeficientes A y B, para ello resolvemos el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} 2A = 3 \\ \\ 3A + 2B = 1 \end{array} \right. \quad \text{de donde:} \quad \left\{ \begin{array}{c} A = \dfrac{3}{2} \\ \\ B = -\dfrac{7}{4}. \end{array} \right.$$

Así, la función

$$y_p(x) = \frac{3}{2}x - \frac{7}{4}$$

es una solución particular de la ecuación. ■

Este ejemplo nos lleva a plantear que si el término no homogéneo es un polinomio de grado n, es decir, si $L[y](x) = P_n(x)$, podemos ensayar como solución particular un polinomio del mismo grado, $y_p(x) = A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0$, con los coeficientes A_n,..., A_1, A_0 a determinar. Los coeficientes se determinan sustituyendo en la ecuación diferencial y resolviendo el sistema obtenido para $A_n, \cdots, A_1, A_0$.

Ejemplo 3.14. Hallemos una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' + 3y' + 2y = e^{3x}.$$

Solución. En este caso, buscamos una función $y_p(x)$ tal que $L[y_p](x) = e^{3x}$, con $L[y](x) = y'' + 3y' + 2y$. Probemos con una solución de la forma $y_p(x) = Ae^{3x}$, donde A es el coeficiente a determinar. Entonces,

$$L[y_p](x) = 9Ae^{3x} + 3(3Ae^{3x}) + 2Ae^{3x} = e^{3x}$$

de donde:

$$20Ae^{3x} = e^{3x}$$

y despejamos A:

$$A = \frac{1}{20}.$$

Por tanto, la función

$$y_p(x) = \frac{1}{20}e^{3x}$$

es una solución particular de la ecuación. ■

Este ejemplo nos lleva a pensar que si $L[y](x) = ae^{\alpha x}$ con a y α constantes, podemos ensayar $y_p(x) = Ae^{\alpha x}$ con A coeficiente a determinar.

Ejemplo 3.15. Hallemos una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' - y' - y = \sin x.$$

Solución. Buscamos ahora una función $y_p(x)$ tal que $L[y_p](x) = \sin x$. Podríamos probar con una función de la forma $A \sin x$, pero al aplicar el operador diferencial L, nos aparecerían términos en $\sin x$ y $\cos x$, mientras que en la parte derecha de la ecuación sólo hay término en $\sin x$:

$$L[y_p](x) = -2A \sin x - A \cos x = \sin x$$

y esto implicaría que $A = 0$ y por tanto $y_p(x) = 0$, que no es solución. Luego deberemos probar con una solución particular cuya forma contenga también términos en $\cos x$:

$$y_p(x) = A \cos x + B \sin x.$$

En este caso, derivando e igualando al término no homogéneo, se tiene:

$$L[y_p](x) = (-2A - B) \cos x + (A - 2B) \sin x = \sin x.$$

Igualando los coeficientes de $\sin x$ y $\cos x$, obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} -2A - B = 0 \\ \\ A - 2B = 1 \end{cases}$$

cuya solución es $A = \frac{1}{5}$ y $B = -\frac{2}{5}$.

Por tanto, la función

$$y_p(x) = \frac{1}{5}\cos x - \frac{2}{5}\sin x$$

es una solución particular de la ecuación. ■

De manera más general, si tenemos $L\left[y\right](x) = a\cos(\beta x) + b\sin(\beta x)$, el método sugiere que se pruebe con soluciones de la forma $y_p(x) = A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)$, con A y B coeficientes a determinar.

Ejemplo 3.16. Hallemos una solución particular de la ecuación diferencial

$$y'' + y' = 5.$$

Solución. Puesto que el término no homogéneo es un polinomio constante, el Ejemplo 3.13 sugiere tomar $y_p(x) = A$ y hacer $L\left[y_p\right](x) = 5$. Pero entonces se obtiene:

$$L\left[y_p\right](x) = 0 \neq 5.$$

Esta situación ocurre porque cualquier solución constante es solución de la homogénea.

Observamos que podemos integrar ambos miembros de esta ecuación, y entonces se tiene:

$$y' + y = 5x + C_1,$$

que es una ecuación lineal de primer orden que sí sabemos resolver. Hallamos el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int dx} = e^x$$

y la solución es:

$$y(x) = e^{-x}\int e^x(5x + C_1)dx = 5x - 5 + C_1 + C_2e^{-x}.$$

Notemos que si tomamos $C_1 = 5$ y $C_2 = 0$, tenemos la solución particular $y(x) = 5x$. Esto sugiere, que en el intento de utilizar coeficientes indeterminados debíamos haber probado con una solución de la forma $y_p(x) = Ax$ en lugar de $y_p(x) = A$. Con la suposición $y_p(x) = Ax$, tenemos que:

$$L\left[y_p\right](x) = 0 + A = 5 \rightarrow A = 5$$

y obtenemos que, efectivamente, $y_p(x) = 5x$ es una solución particular de la ecuación. ■

Como se ha visto en este ejemplo, la elección de y_p no había resultado adecuada porque dicha función era una solución de la ecuación homogénea asociada. Sin embargo, al considerar $xy_p(x)$ se ha podido encontrar la solución.

Por consiguiente, el método de los coeficientes indeterminados deberá tener en cuenta esta situación, de modo que si la expresión supuesta inicialmente para y_p es solución de la ecuación homogénea asociada, se reemplazará por $x^h y_p$, siendo h el menor entero no negativo tal que ningún término de la expresión $x^h y_p$ sea solución de la ecuación homogénea.

Como se ha visto en los ejemplos, se elige la forma de la solución particular dependiendo de la forma del término no homogéneo $g(x)$ y de las raíces de la ecuación característica. Tenemos así los siguientes casos:

Caso I: El término no homogéneo es un polinomio de grado n,

$$g(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0.$$

En este caso se propone como solución particular un polinomio del mismo grado al que le multiplicamos el término x^h:

$$y_p(x) = (A_n x^n + ... + A_1 + A_0)\, x^h.$$

siendo A_n, $A_{n-1}, ..., A_1$, A_0 coeficientes a determinar. El término x^h se añade si 0 es una de las soluciones de la ecuación característica, siendo h su orden de multiplicidad.

Ejemplo 3.17. Para la ecuación diferencial $y'' - 5y' + 6y = x^2 + 5$, veamos qué solución particular proponemos.
Solución.

- El término no homogéneo $g(x)$ es un polinomio de grado 2.
- Las raíces del polinomio característico son $r_1 = 2$ y $r_2 = 3$. Como 0 no es raíz se tiene que $h = 0$, es decir, $x^h = 1$.

Teniendo esto en cuenta se propone como solución particular un polinomio de grado 1 con coeficientes A, B y C a determinar:

$$y_p(x) = Ax^2 + Bx + C. \blacksquare$$

Ejemplo 3.18. Consideramos la ecuación diferencial $y''' + 4y'' = 3x - 2$. Veamos qué solución particular proponemos.
Solución.

- El término no homogéneo $g(x)$ es un polinomio de grado 1.
- Las soluciones de la ecuación característica son: $r_1 = 3$ con orden de multiplicidad 1 y $r_2 = 0$ con orden de multiplicidad 2. Por tanto, $h = 2$ y en la solución particular añadimos $x^h = x^2$.

Teniendo esto en cuenta se propone como solución particular un polinomio de grado 1 con A y B coeficientes a determinar, multiplicado por el término x^2:

$$y_p(x) = (Ax + B)x^2. \blacksquare$$

Caso II: El término no homogéneo es un producto de una exponencial y un polinomio de grado n :

$$g(x) = e^{\alpha x} \ (a_n x^n + ... + a_1 x + a_0).$$

En este caso se propone como solución particular el producto de un polinomio del mismo grado multiplicado por la misma exponencial que aparece en $g(x)$ y añadimos el término x^h si α es una de las raíces de la ecuación característica, siendo h su orden de multiplicidad:

$$y_p(x) = e^{\alpha x} \ (A_n x^n + ... + A_1 + A_0) \, x^h.$$

con A_n, $A_{n-1}, ..., A_1$, A_0 a determinar.

Nota 3.1. Cuando $\alpha = 0$ estamos en la situación del caso I.

Ejemplo 3.19. Dada la ecuación $y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{3x}(3x^3 + x)$, veamos qué solución particular proponemos.
Solución.

- El término no homogéneo $g(x)$ es el producto de una exponencial con $\alpha = 3$ y un polinomio de grado 3.
- Las soluciones de la ecuación característica son: $r_1 = 1$, $r_2 = -1$ y $r_3 = 2$, luego 3 no es raíz; por tanto, $h = 0$.

Así pues, la propuesta de solución particular es la función exponencial que aparece en $g(x)$ multiplicada por un polinomio de grado 3 completo con coeficientes A, B, C y D a determinar. En este caso $x^h = x^0 = 1$.

$$y_p(x) = e^{3x}(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D). \ \blacksquare$$

Ejemplo 3.20. Dada la ecuación diferencial $y''' - y = e^x$, veamos qué solución particular proponemos.
Solución.

- El término no homogéneo $g(x)$ es e^x, es decir el producto de una exponencial con $\alpha = 1$ y un polinomio de grado 0.
- Las soluciones de la ecuación característica son: $r_1 = 1$ con orden de multiplicidad 3; por tanto, $h = 3$.

Teniendo en cuenta la forma del término no homogéneo $g(x)$ la solución particular que se propone es el producto de la exponencial que aparece en $g(x)$ multiplicada por un polinomio de grado 0, añadiendo el término $x^h = x^3$:

$$y_p(x) = e^x \ A \ x^3. \ \blacksquare$$

Caso III: El término no homogéneo es un producto de una exponencial y una combinación de coseno y seno del mismo ángulo multiplicados por polinomios:

$$g(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)].$$

En este caso la propuesta de solución particular es el producto de la función exponencial $e^{\alpha x}$ que aparece en $g(x)$ multiplicado por, $\cos(\beta x)$ por un polinomio y $\sin(\beta x)$ por otro polinomio. Estos polinomios tienen el mismo grado, el mayor grado de los que aparecen en $g(x)$ y con coeficientes diferentes a determinar. Añadimos el término x^h si $\alpha \pm i\beta$ es una de las raíces de la ecuación característica, siendo h su orden de multiplicidad.

$$y_p(x) = e^{\alpha x}[P_N(x)\cos(\beta x) + Q_N(x)\sin(\beta x)]\, x^h.$$

con $P_N(x)$ y $Q_N(x)$ polinomios de grado $N = \text{máx}\{n, m\}$ y con coeficientes a determinar para cada uno de ellos.

■ **Nota 3.2.** Cuando $\beta = 0$ este caso corresponde al caso II. Y si $\alpha = \beta = 0$ se tiene el caso I.

⬣ **Ejemplo 3.21.** Dada la ecuación diferencial de orden dos $y'' - 2y' - 3y = e^{2x}(x^2\cos(3x) + 5x\sin(3x))$, veamos qué solución particular proponemos.
Solución.

- El término no homogéneo $g(x)$ es el producto de una exponencial con $\alpha = 2$ y una suma de coseno y seno, con $\beta = 3$, multiplicados por polinomios de grado 2 y 1, respectivamente. Luego $N = 2$.

- Las soluciones de la ecuación característica son: $r_1 = -1$ y $r_2 = 3$. Como $2 \pm 3i$ no son raíces, entonces $h = 0$.

Con todo ello la propuesta de solución particular es el producto de la exponencial con $\alpha = 2$ y una suma de coseno y seno, con $\beta = 3$, multiplicados por polinomios de grado 2. El término $x^h = x^0 = 1$; por tanto,

$$y_p(x) = e^{2x}[(Ax^2 + Bx + C)\cos(3x) + (Dx^2 + Ex + F)\sin(3x)]. \blacksquare$$

⬣ **Ejemplo 3.22.** Dada la ecuación diferencial $y'' - 2y' + 2 = 3e^x\sin(x)$, veamos qué solución particular proponemos.
Solución.

- El término no homogéneo $g(x)$ es el producto de una exponencial con $\alpha = 1$ y una suma de coseno y seno, con $\beta = 1$, multiplicados por polinomios de grado 0. Luego $N = 0$.

- Las soluciones de la ecuación característica son: $r_{1,2} = 1 \pm i$; por tanto, $h = 1$.

Así pues, la propuesta de solución particular es el producto de la exponencial con $\alpha = 1$ y una suma de coseno y seno, con $\beta = 1$, multiplicados por polinomios de grado 0. El término $x^h = x^1 = x$; luego:

$$y_p(x) = e^x[(A\cos(x) + B\sin(x)]\, x. \blacksquare$$

Caso IV: Si el término no homogéneo es una suma de los casos anteriores, por el principio de superposición, la propuesta de solución particular es una suma de las correspondientes propuestas.

Ejemplo 3.23. Para la ecuación diferencial $y'''+3y''-y'-3y = e^{-3x}+3xe^{2x}$, veamos qué solución particular proponemos.
Solución.

- El término no homogéneo es:

$$g(x) = g_1(x) + g_2(x) = e^{-3x} + 3xe^{2x}.$$

- Las soluciones de la ecuación característica son $r_1 = -3$ con orden de multiplicidad 1 y $r_2 = 1$ con orden de multiplicidad 2. Luego, en la propuesta del primer sumando $h = 1$.

Teniendo en cuenta todo esto,la solución particular es la suma de dos soluciones particulares correspondientes ambas al caso II,

$$y_p(x) = y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x) = Ae^{-3x}\,x + (Bx + C)e^{2x}. \blacksquare$$

(II) Método de variación de los parámetros

El método de variación de los parámetros o de las constantes es más general que el método de los coeficientes indeterminados porque se puede aplicar también a ecuaciones lineales con coeficientes variables y para cualquiera que sea la forma del término no homogéneo $g(x)$.

Consideremos la ecuación lineal no homogénea de orden dos expresada en forma canónica:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{3.18}$$

Supongamos que conocemos un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada, $\{y_1(x), y_2(x)\}$. Entonces la solución de la homogénea es:

$$y_h(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x), \qquad \text{con } C_1 \text{ y } C_2 \text{ constantes.}$$

Para hallar una solución particular de la ecuación no homogénea reemplazamos las constantes C_1 y C_2 por dos funciones $v_1(x)$ y $v_2(x)$ a determinar:

$$y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x). \tag{3.19}$$

Como se han introducido dos incógnitas, v_1 y v_2, necesitamos dos ecuaciones que las contengan para determinarlas. Una de estas ecuaciones la obtenemos al sustituir la solución particular $y_p(x)$ y sus derivadas en la ecuación diferencial (3.18).

Calculamos la primera derivada y reordenamos sus términos:

$$y_p' = (v_1'y_1 + v_2'y_2) + (v_1y_1' + v_2y_2'). \tag{3.20}$$

Para simplificar cálculos y evitar derivadas de segundo orden de v_1 y v_2 que complican su resolución, imponemos la condición:

$$v_1'y_1 + v_2'y_2 = 0, \tag{3.21}$$

que nos proporciona una primera ecuación para obtener v_1 y v_2. Con esta condición, la ecuación (3.20) queda,

$$y_p' = v_1y_1' + v_2y_2'.$$

Derivando de nuevo:

$$y_p'' = v_1'y_1' + v_1y_1'' + v_2'y_2' + v_2y_2''$$

y sustituyendo en (3.18),

$$v_1'y_1' + v_1y_1'' + v_2'y_2' + v_2y_2'' + pv_1y_1' + pv_2y_2' + qv_1y_1 + qv_2y_2$$

$$= v_1\left(y_1'' + py_1' + qy_1\right) + v_2\left(y_2'' + py_2' + qy_2\right) + v_1'y_1' + v_2'y_2'$$

$$= v_10 + v_20 + v_1'y_1' + v_2'y_2' = g, \quad \text{(ya que } y_1,\, y_2 \text{ son soluciones de (3.18))}$$

y obtenemos la segunda ecuación que buscamos,

$$v_1'y_1' + v_2'y_2' = g. \tag{3.22}$$

Si existen v_1 y v_2 verificando (3.21) y (3.22), entonces y_p será solución particular de la ecuación no homogénea. Por tanto, tenemos que resolver el siguiente sistema para las incógnitas v_1' y v_2':

$$\left.\begin{array}{rcl} v_1'y_1 + v_2'y_2 & = & 0 \\ v_1'y_1' + v_2'y_2' & = & g. \end{array}\right\}$$

que en forma matricial se puede escribir:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ g \end{pmatrix}.$$

Por el método de Cramer tenemos que:

$$v_1' = \frac{-g(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)} \quad \text{y} \quad v_2' = \frac{g(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}.$$

Notemos que el sistema sí tiene solución, pues el término que aparece en el denominador es el wronskiano de y_1 e y_2, que es no nulo ya que y_1 e y_2 constituyen un conjunto fundamental de soluciones de la homogénea. Integrando las expresiones anteriores obtenemos:

$$v_1 = \int \frac{-g(x)y_2(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx \quad \text{y} \quad v_2 = \int \frac{g(x)y_1(x)}{W[y_1, y_2](x)}dx.$$

Sustituyendo en la expresión (3.19) llegamos a la solución particular $y_p(x)$.

■ **Nota 3.3.** Cuando integramos para hallar v_1 y v_2 podemos tomar las constantes de integración como cero, ya que al multiplicar por y_1 e y_2 obtendríamos términos que ya están representados en la solución general de la homogénea.

⬢ **Ejemplo 3.24.** Hallemos una solución particular de la ecuación diferencial $y'' + y = \csc x$.

Solución. Para la ecuación homogénea asociada $y''+y = 0$, se tiene la ecuación auxiliar $r^2+1 = 0$, cuyas soluciones son $r = \pm i$. Por tanto, $\{\cos x, \sin x\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada cuya solución general será:

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Tomamos, entonces, como solución particular de la ecuación completa una función de la forma:

$$y_p = v_1(x) \cos x + v_2(x) \sin x$$

con v_1 y v_2 funciones a determinar que verifiquen:

$$\begin{cases} \cos x\, v_1' + \sin x\, v_2' = 0 \\ -\sin x\, v_1' + \cos x\, v_2' = \dfrac{1}{\sin x}. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$v_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \dfrac{1}{\sin x} & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-1}{1} = -1,$$

$$v_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \dfrac{1}{\sin x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Integrando se tiene:

$$v_1(x) = -x \quad \text{y} \quad v_2(x) = \ln |\sin x|\,.$$

Por tanto,

$$y_p = -x \cos x + \ln |\sin x| \sin x$$

y la solución general de la ecuación es:

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x - x \cos x + \ln |\sin x| \sin x. \ \blacksquare$$

⬢ **Ejemplo 3.25.** Hallemos una solución particular de la ecuación $y'' + y = \tan x$ en el intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Solución. Como hemos visto en el ejemplo anterior un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada es:

$$y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Como solución particular de la ecuación completa tomaremos una función de la forma:

$$y_p = v_1(x) \cos x + v_2(x) \sin x$$

con v_1 y v_2 funciones a determinar que verifiquen

$$\begin{cases} \cos x \, v_1' + \sin x \, v_2' = 0 \\ -\sin x \, v_1' + \cos x \, v_2' = \tan x. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema por el método de Cramer, como $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, se tiene:

$$v_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \tan x & \cos x \end{vmatrix} = -\sin x \tan x$$

$$v_2'(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \tan x \end{vmatrix} = \sin x$$

e integrando:

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \int -\frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int -\frac{1 - \cos^2 x}{\cos x} dx \\ &= -\int \frac{1}{\cos x} dx + \int \cos x dx = -\ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + \sin x, \end{aligned}$$

$$v_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x.$$

Por tanto,

$$y_p = \left(\sin x - \ln \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} \right) \cos x - \cos x \sin x. \blacksquare$$

3.2.3. Ecuaciones de Cauchy-Euler

Una clase especial de ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes variables que sabemos resolver son las ecuaciones de Cauchy-Euler, que son aquéllas que pueden escribirse de la forma:

$$a\, x^2 \frac{d^2 y}{dx} + b\, x \frac{dy}{dx} + c\, y = h(x) \qquad (3.23)$$

donde a, b y c son constantes.

Este tipo de ecuaciones se resuelven haciendo el cambio $x = e^t$ que transforma la ecuación (3.23) en una ecuación con coeficientes constantes. También

pueden resolverse suponiendo que la solución es de la forma $y(x) = x^r$, lo que conduce a una ecuación auxiliar en r. Veamos ambos métodos.

Método 1: Hacemos el cambio de variables

$$(x, y) \longrightarrow (t, y)$$

definido por $x = e^t$. Entonces $\dfrac{dx}{dt} = e^t$. Notemos que con este cambio asumimos que $x > 0$.

Para obtener la derivada de y respecto de la nueva variable t aplicamos la regla de la cadena:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}e^t.$$

Despejamos:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}$$

y volvemos a derivar, aplicando de nuevo la regla de la cadena:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^t\frac{dy}{dx}\right) = e^t\frac{dy}{dx} + e^t\frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt} =$$
$$= e^t\frac{dy}{dx} + e^{2t}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dt} + e^{2t}\frac{d^2y}{dx^2}$$

y despejamos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-2t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-2t}\frac{dy}{dt}.$$

Sustituyendo $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ en la ecuación (3.23), llegamos a la ecuación lineal de coeficientes constantes:

$$a\frac{d^2y}{dt^2} + (b-a)\frac{dy}{dt} + cy = f(t). \qquad (3.24)$$

Esta ecuación ya se puede resolver por los métodos conocidos obteniendo $y(t)$. Posteriormente, deshacemos el cambio para tener $y(x)$.

Si nos interesan soluciones para $x < 0$, hacemos el cambio de variable $x = -\xi$ y resolvemos la ecuación para $\xi > 0$.

Método 2: En primer lugar resolvemos la ecuación homogénea asociada:

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad x > 0.$$

Como el exponente de x coincide con el orden de la derivada en cada sumando, suponemos que las soluciones son de la forma $y = x^r$, con r a determinar. De este modo, al hacer la sustitución de la solución y sus derivadas en la ecuación obtenemos términos del mismo grado:

$$a\,x^2\,r\,(r-1)\,x^{r-2} + b\,x\,r\,x^{r-1} + c\,x^r = 0$$

y podemos sacar factor común x^r:

$$x^r\,(a\,r\,(r-1) + b\,r + c) = 0.$$

Puesto que $x^r > 0$, para que se verifique la ecuación, se tendrá que anular el polinomio de segundo grado:

$$ar(r-1) + br + c = 0. \tag{3.25}$$

La ecuación (3.25) es una ecuación auxiliar de la ecuación de Cauchy-Euler, llamada **ecuación indicial**.

Veamos qué soluciones obtenemos en función de las raíces de la ecuación indicial.

1. Si las raíces son r_1 y r_2, reales y distintas, entonces dos soluciones linealmente independientes son $y_1(x) = x^{r_1}$ e $y_2(x) = x^{r_2}$. Por tanto la solución de esta ecuación homogénea es:

$$y_h(x) = C_1 x^{r_1} + C_2 x^{r_2}.$$

2. Si la ecuación auxiliar tiene una raíz doble r, entonces una solución es $y_1(x) = x^r$. Mediante el método de reducción del orden obtenemos una segunda solución linealmente independiente, $y_2(x) = x^r \ln x$. En este caso,

$$y_h(x) = C_1 x + C_2 x^r \ln x.$$

3. Si las raíces son complejas, $r_1 = \lambda + \mu i$ y $r_2 = \lambda - \mu i$, con $\mu \neq 0$, entonces una solución compleja viene dada por:

$$\begin{aligned} x^{r_1} &= e^{\ln x^{r_1}} = e^{r_1 \ln x} = e^{(\lambda+\mu i)\ln x} = e^{\lambda \ln x} e^{\mu i \ln x} \\ &= x^{\lambda} e^{\mu i \ln x} = x^{\lambda}(\cos(\mu \ln x) + i \sin(\mu \ln x)), \quad x > 0. \end{aligned}$$

Si x^{r_1} es una solución compleja, es fácil comprobar que su parte real y su parte imaginaria son soluciones reales y además son linealmente independientes (ver Ejercicio 7 de esta sección). Por tanto, la solución de la homogénea es:

$$y_h(x) = C_1 x^{\lambda} \cos(\mu \ln x) + C_2 x^{\lambda} \sin(\mu \ln x), \quad x > 0.$$

Para $x < 0$, hacemos el cambio de variable $x = -\xi$ y resolvemos la ecuación para $\xi > 0$.

La solución particular se calcula por el método de variación de los parámetros a partir de la ecuación diferencial en forma canónica.

Ejemplo 3.26. Resolvamos la ecuación diferencial de Cauchy-Euler

$$x^2 y'' + 2xy' - 2y = x$$

mediante los dos métodos estudiados, en $]0, +\infty[$.

Solución. 1) Para esta ecuación, se tiene que $a = 1$, $b = 2$, $c = -2$. Por tanto, el cambio $x = e^t$, nos lleva a la ecuación de coeficientes constantes dada por (3.24):

$$y'' + y' - 2y = e^t.$$

Su ecuación auxiliar es $r^2 + r - 2 = 0$, con raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = -2$. Luego la solución general de la parte homogénea es:

$$y_h(t) = C_1e^t + C_2e^{-2t}.$$

Para hallar la solución particular, aplicamos el método de los coeficientes indeterminados, suponiendo que ésta es de la forma:

$$y_p(t) = t^hAe^t$$

siendo h el orden de multiplicidad de 1 en la ecuación auxiliar; en este caso $h = 1$, por tanto:

$$y_p(t) = tAe^t, \quad y_p'(t) = Ae^t + Ate^t, \quad y_p''(t) = 2Ae^t + Ate^t$$

y sustituyendo en la ecuación diferencial, obtenemos que $3A = 1$, es decir, $A = 1/3$. Por tanto:

$$y_p(t) = \frac{1}{3}te^t$$

y la solución general es:

$$y(t) = C_1e^t + C_2e^{-2t} + \frac{1}{3}te^t.$$

Deshaciendo el cambio inicial $x = e^t$, obtenemos:

$$y(x) = C_1x + C_2x^{-2} + \frac{1}{3}x\ln x, \quad x > 0.$$

2) Para aplicar el segundo método, suponemos que las soluciones son de la forma x^r. Derivando y sustituyendo llegamos también a la ecuación auxiliar $r(r-1) + 2r - 2 = 0$ con raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = -2$, obteniendo la solución general de la parte homogénea:

$$y_h(x) = C_1x + C_2x^{-2}.$$

Para hallar la solución particular tenemos que aplicar el método de variación de parámetros. Para ello, escribimos la ecuación en forma canónica:

$$y'' + \frac{2}{x}y' - \frac{2}{x^2}y = \frac{1}{x}.$$

Con este método, tomamos la solución particular de la forma:

$$y_p(x) = v_1(x)x + v_2(x)x^{-2}$$

con v_1 y v_2 funciones a determinar. Estas funciones vienen dadas por:

$$v_1(x) = \int \frac{-x^{-2}\frac{1}{x}}{W[x, x^{-2}]}dx = \int \frac{-x^{-3}}{-3x^{-2}}dx = \int \frac{1}{3x}dx = \frac{1}{3}\ln|x|,$$

$$v_2(x) = \int \frac{x\frac{1}{x}}{W[x,x^{-2}]}dx = \int \frac{1}{-3x^{-2}}dx = \int \frac{-1}{3}x^2 dx = \frac{-x^3}{9}.$$

Por tanto:

$$y_p(x) = \frac{1}{3}x\ln|x| - \frac{x^3}{9}x^{-2} = \frac{1}{3}x\ln|x| - \frac{x}{9}$$

y la solución general es:

$$y(x) = C_1x + C_2x^{-2} + \frac{1}{3}x\ln|x| - \frac{x}{9} = Cx + C_2x^{-2} + \frac{1}{3}x\ln|x|, \quad x > 0. \blacksquare$$

⬣ **Ejemplo 3.27.** Resolvamos el siguiente problema de valor inicial:

$$x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(1) = 1, \; y'(1) = 0.$$

Solución. Teniendo en cuenta las condiciones iniciales, suponemos que las soluciones son de la forma $y(x) = x^r$, $x > 0$. Derivando y sustituyendo llegamos a la ecuación indicial $r(r-1) - 3r + 4 = 0$ que tiene una raíz doble $r = 2$. El conjunto fundamental de soluciones es:

$$\{x^2, x^2\ln x\}$$

y la solución de la ecuación homogénea es:

$$y(x) = C_1x^2 + C_2x^2\ln x.$$

Obtenemos ahora los valores de C_1 y C_2 mediante las condiciones iniciales dadas:

$$y(1) = C_1 = 1.$$

Puesto que

$$y'(x) = 2C_1x + 2C_2x\ln x + C_2x,$$

se tiene que:

$$y'(1) = 2C_1 + C_2 = 0, \quad \text{es decir,} \quad C_2 = -2.$$

La solución del problema de valor inicial es:

$$y(x) = x^2 - 2x^2\ln x. \blacksquare$$

⬣ **Ejemplo 3.28.** Resolvamos la ecuación diferencial de Cauchy-Euler

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = x.$$

Solución. Vamos a aplicar el segundo método. Para ello, suponemos que las soluciones son de la forma x^r. Derivando y sustituyendo llegamos a la ecuación indicial $r(r-1) - r + 1 = 0$ que tiene una raíz doble $r = 1$. Luego la solución general de la parte homogénea es:

$$y_h(x) = C_1x + C_2x\ln x, \quad x > 0.$$

Para aplicar el método de variación de parámetros escribimos la ecuación en forma canónica:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x}.$$

Con este método, tomamos la solución particular de la forma:

$$y_p(x) = v_1(x)x + v_2(x)x\ln x$$

con v_1 y v_2 funciones dadas por:

$$v_1(x) = \int \frac{-\ln x}{W[x, x\ln x]}dx = \int \frac{-\ln x}{x}dx = -\frac{\ln^2 x}{2},$$

$$v_2(x) = \int \frac{1}{W[x, x^{-2}]}dx = \int \frac{1}{x}dx = \ln x;$$

por tanto:

$$y_p(x) = -\frac{\ln^2 x}{2}x + \ln x\, x\ln x = \frac{1}{2}x\ln^2 x$$

y la solución general es:

$$y(x) = C_1 x + C_2 x\ln x + \frac{1}{2}x\ln^2 x, \quad x > 0. \blacksquare$$

Ejercicios de la sección 3.2

1. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $2y'' + 4y' - 6y = 0$.
   (b) $y'' - 6y' + 9y = 0$.
   (c) $y'' + 2y' + 2y = 0$.
   (d) $y'' + 5y = 0$.

   (Solución: (a) $y(x) = C_1 e^x + C_2\ \mathrm{e}^{-3x}$.
   (b) $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2\, x\, e^{3x}$.
   (c) $y(x) = C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x$.
   (d) $y(x) = C_1 \cos(\sqrt{5}x) + C_2 \sin(\sqrt{5}x))$.

2. Dada $f(x) = x$ solución de la ecuación $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = 0$, halla una segunda solución linealmente independiente.

   (Solución: $y = x^2 + 1$).

3. Halla, mediante el método de los coeficientes indeterminados, una solución particular de la ecuación $y'' + 2y' - 3y = g(x)$, siendo $g(x)$:

   (a) $g(x) = 7\cos(3x)$.
   (b) $g(x) = 5e^{-3x}$.
   (c) $g(x) = x^2\cos x$.
   (d) $g(x) = x^2 e^x + 3xe^x$.
   (e) $g(x) = x^2 e^x + 3xe^{-x}$.
   (f) $g(x) = \tan x$.

(g) $g(x) = 2xe^x \sin x - e^x \cos x$.

(Solución: (a) $y_p(x) = \dfrac{7}{30} \sin(3x) - \dfrac{7}{15} \cos(3x)$.

(b) $y_p(x) = -\dfrac{5}{4} x e^{-3x}$.

(c) $y_p(x) = \dfrac{1}{250} (\cos x(-50x^2 + 10x + 29) + \sin x(25x^2 + 70x + 25))$.

(d) $y_p(x) = \dfrac{e^x}{96} (8x^3 + 30x^2 - 15x)$.

(e) $y_p(x) = \dfrac{e^x}{96} (8x^3 - 6x^2 + 3x) - \frac{3}{4} x e^{-x}$.

(f) No funciona el método de coeficientes indeterminados.

(g) $y_p(x) = \dfrac{e^x}{289} (-34x + 84) \sin x + (-136x + 13) \cos x)$.

4. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$.
   (b) $y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4 \sin x$.
   (c) $y'' - 3y' - 4y = -8e^x \cos(2x)$.

   (Solución: (a) $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} - \frac{1}{5} x e^{-x}$.

   (b) $y(x) = C_1 + C_2 e^{3x} + \dfrac{8}{3} x e^{3x} - \dfrac{3}{2} \cos x + \dfrac{1}{2} \sin x$.

   (c) $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{4x} + e^x (\dfrac{2}{13} \sin(2x) + \dfrac{10}{13} \cos(2x)))$.

5. Halla la solución general de las ecuaciones siguientes:

   (a) $y'' + y = \tan x + 3x - 1$ en $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$.
   (b) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{2x}$, $x > 0$.
   (c) $y'' - 2y' + y = e^x \ln x$, $x > 0$.
   (d) $y'' + 4y' + 4y = x^{-2} e^{-2x}$, $x > 0$.

   (Solución: (a) $y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \left(\sin x - \ln \sqrt{\dfrac{\sin x + 1}{\sin x - 1}} \right) \cos x -$ $\sin x \cos x + 3x - 1$.

   (b) $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \dfrac{x}{2} e^x (\ln x - 1)$.

   (c) $y(x) = C_1 e^x + C_2 x e^x + \dfrac{x^2}{4} e^x (2 \ln x - 3))$.

   (d) $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} - e^{-2x} (1 + \ln x))$.

6. Resuelve el problema de valor inicial:

   $2x^2y'' - 3xy' + 3y = \dfrac{2}{x}$; $y(1) = \dfrac{1}{5}$, $y'(1) = \dfrac{4}{5}$.

   (Solución: $y(x) = \dfrac{1}{5x} - 2x + 2x^{3/2}$).

7. Comprueba que las funciones $\phi_1(x) = x^\lambda \cos(\mu \ln x)$ y $\phi_2(x) = x^\lambda \sin(\mu \ln x)$ constituyen una conjunto fundamental de soluciones de la ecuación:

$$ax^2 \frac{d^2y}{dx} + bx\frac{dy}{dx} + cy = 0 \quad x > 0.$$

8. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $x^2y'' + 2xy' - 12y = x$.

   (b) $3x^2y'' + 11xy' - 3y = 8 - 3\ln x$, $x > 0$.

   (c) $x^2y'' - xy' + y = x^2$, $x > 0$.

   (d) $x^2y'' + xy' + 9y = 1$, $x > 0$.

   (Solución: (a) $y(x) = C_1x^3 + \dfrac{C_2}{x^4} - \dfrac{x}{10}$.

   (b) $y(x) = C_1x^{1/3} + C_2x^{-3} + \ln x$.

   (c) $y(x) = C_1x + C_2x\ln x + x^2$.

   (d) $y(x) = C_1\cos(3\ln x) + C_2\sin(3\ln x) + \dfrac{1}{9}$).

3.3. Aplicaciones de las ecuaciones lineales de segundo orden

Muchos tipos de problemas como movimientos de muelles elásticos o flujo de corrientes eléctricas, están relacionados con la solución de una ecuación diferencial ordinaria de orden dos. Veamos a continuación algunos de ellos.

3.3.1. Vibraciones mecánicas

Podemos encontrar ejemplos de vibraciones mecánicas en los rebotes de un coche debido a los baches, en las vibraciones de un puente debido al tráfico y al viento, o en las alas de un avión debido a la vibración de los motores y al viento.

Como modelo para estudiar las vibraciones mecánicas vamos a considerar un sistema masa-resorte. Estudiaremos el tipo de soluciones que se obtienen desde el caso más sencillo, el de un sistema libre sin amortiguación, hasta un sistema con amortiguación y forzado, viendo qué tipo de movimiento describen las distintas soluciones en función de los parámetros que intervienen en

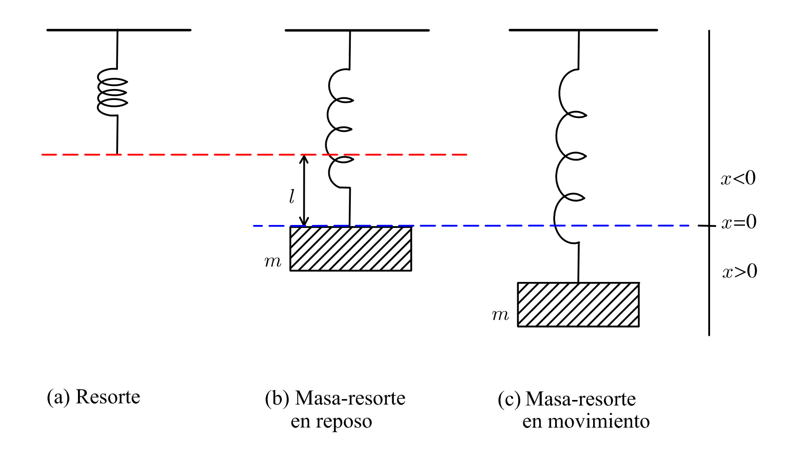


Figura 3.2: Sistema masa-resorte.

la ecuación de este sistema. Resulta de especial interés la obtención de las condiciones bajo las cuáles se produce resonancia. Este modelo es igualmente válido para el caso de circuitos eléctricos ya que se obtiene el mismo tipo de ecuación.

El sistema masa-resorte que vamos a estudiar consiste en un resorte en espiral suspendido de un soporte rígido con una masa sujeta al extremo. Para analizar este sistema aplicamos *la ley de Hooke* y la *segunda ley de Newton*.

La ley de Hooke establece que el resorte ejerce una fuerza de restitución opuesta a la dirección del alargamiento del resorte con una magnitud directamente proporcional al valor del alargamiento. Es decir, $F = ks$, donde s es el alargamiento y k es una constante propia del muelle.

Si suspendemos una masa m del muelle y éste experimenta un alargamiento l hasta alcanzar la posición de equilibrio, podemos obtener el valor de k aplicando la ley de Hooke, ya que el peso y la fuerza de restitución son de igual magnitud pero con sentido contrario, es decir, igualamos $mg = kl$ y despejamos k. El valor k es un parámetro conocido característico del muelle.

El primer paso en nuestro estudio consiste en elegir un sistema coordenado para representar el movimiento de la masa. Consideramos un eje vertical donde representar el desplazamiento de la masa. Tomamos el origen, $x = 0$, en la posición de equilibrio y consideramos $x > 0$ cuando la masa se encuentre por debajo de dicha posición y $x < 0$ cuando se encuentre por encima (ver Figura 3.2).

Veamos ahora las diversas fuerzas que actúan sobre la masa m :

- Gravedad: la fuerza de la gravedad, $\vec{F}_1$, es una fuerza dirigida hacia abajo y de magnitud mg, donde g es la aceleración debida a la gravedad,

$$F_1 = mg.$$

- Fuerza de restitución: el resorte ejerce una fuerza de restitución, $\vec{F}_2$, cuya magnitud es proporcional al alargamiento del resorte y de sentido opuesto

al movimiento:

$$F_2 = -k\,(x + l).$$

Observemos que cuando $x = 0$, es decir en la posición de equilibrio, la fuerza de la gravedad y la fuerza ejercida por el resorte se equilibran entre sí, por tanto, $mg = kl$ y podemos expresar la fuerza de restitución como:

$$F_2 = -kx - mg.$$

- Fuerza de amortiguación: puede existir una fuerza de amortiguación o fricción, $\vec{F}_3$, sobre la masa, por ejemplo la resistencia del aire o bien la fricción debida a un amortiguador. En cualquier caso, suponemos que la fuerza de amortiguación es proporcional a la magnitud de la velocidad de la masa, pero en sentido opuesto al desplazamiento:

$$F_3 = -b\frac{dx}{dt}$$

donde $b > 0$ es la constante de amortiguación dada en unidades de masa/tiempo.

- Fuerzas externas: la resultante de todas las fuerzas externas, $\vec{F}_4$, que actúen sobre la masa (por ejemplo, una fuerza magnética o las fuerzas ejercidas sobre un automóvil ocasionadas por los baches del pavimento) vendrán representadas por:

$$F_4 = f(t).$$

Suponemos que dichas fuerzas sólo dependen del tiempo y no de la posición ni velocidad.

Aplicando ahora la segunda ley de Newton, tenemos que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kx - mg - b\frac{dx}{dt} + f(t),$$

obteniéndose la ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = f(t). \qquad (3.26)$$

Cuando $b = 0$, se dice que el sistema es **no amortiguado**; en caso contrario, se dice que el sistema es **amortiguado**.

Cuando $f(t) \equiv 0$, se dice que el movimiento es **libre**; en caso contrario, se dice que el movimiento es **forzado**.

Estudiemos cada uno de los casos posibles.

(I) Movimiento libre no amortiguado

Algunos ejemplos físicos de este tipo de problemas son los muelles helicoidales. En este caso la ecuación (3.26) se reduce a:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0.$$

Dividiendo por m, se tiene:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

donde $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La ecuación obtenida es homogénea con ecuación auxiliar asociada:

$$r^2 + \omega^2 = 0.$$

Puesto que sus raíces son complejas conjugadas, $r = \pm\omega i$, obtenemos la solución general:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t).$$

Si cambiamos a unas nuevas constantes A y ϕ dadas por:

$$C_1 = A \sin\phi,$$
$$C_2 = A \cos\phi,$$

es decir,

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \quad \text{y} \quad \phi = \arctan\frac{C_1}{C_2},$$

se tiene que:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) = A \sin\phi \cos(\omega t) + A\cos\phi \sin(\omega t) = A\sin(\omega t + \phi);$$

es decir, podemos expresar la solución general de la forma:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi). \tag{3.27}$$

De esta solución se deduce que el movimiento es una onda senoidal o lo que se llama un **movimiento armónico simple**.

La constante A representa la amplitud del movimiento y ϕ es el ángulo de fase. El movimiento es periódico con periodo $P = \frac{2\pi}{\omega}$ y frecuencia natural $\frac{\omega}{2\pi}$.

■ **Nota 3.4.** Observemos que la amplitud y el ángulo de fase dependen de C_1 y C_2 y, por tanto, de las condiciones iniciales posición y velocidad inicial. Sin embargo, el periodo y la frecuencia sólo dependen de ω, es decir, de k y de m.

(II) Movimiento libre amortiguado

En la mayoría de las aplicaciones existe algún tipo de fuerza de fricción o amortiguación que desempeña un papel importante. En este caso, la ecuación (3.26) queda:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Al resolverla obtenemos distintos tipos de soluciones dependiendo de las raíces del polinomio característico:

$$r = -\frac{b}{2m} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}. \tag{3.28}$$

(II.1) **Movimiento oscilatorio o subamortiguado**: se presenta cuando

$$b^2 < 4mk,$$

es decir, cuando la amortiguación es pequeña. En este caso, a partir de (3.28) se obtienen dos raíces complejas conjugadas, $\alpha \pm i\beta$ donde:

$$\alpha = -\frac{b}{2m} \quad \text{y} \quad \beta = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m},$$

y la solución general es:

$$x(t) = e^{\alpha t}(C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)).$$

Análogamente al caso anterior, podemos cambiar de constantes y expresar esta solución de la forma:

$$x(t) = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \phi)$$

donde $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ y $\phi = \arctan \frac{C_1}{C_2}$.

Ahora la solución $x(t)$ es un producto de un factor exponencial (llamado factor de amortiguación) y un factor senoidal, que explica el movimiento oscilatorio. Puesto que este factor senoidal varía entre -1 y 1 y tiene periodo $\dfrac{2\pi}{\beta}$, se tiene que la solución varia entre $-Ae^{\alpha t}$ y $Ae^{\alpha t}$ con cuasiperiodo $P = \dfrac{2\pi}{\beta} = \dfrac{4m\pi}{\sqrt{4mk - b^2}}$. Además, como b y m son constantes positivas, se tiene que $\alpha < 0$, por tanto, el factor de amortiguación $e^{\alpha t}$ tiende a 0 cuando t tiende a $+\infty$.

El sistema se llama subamortiguado porque no hay suficiente amortiguación para prevenir que el sistema oscile (ver Figura 3.3).

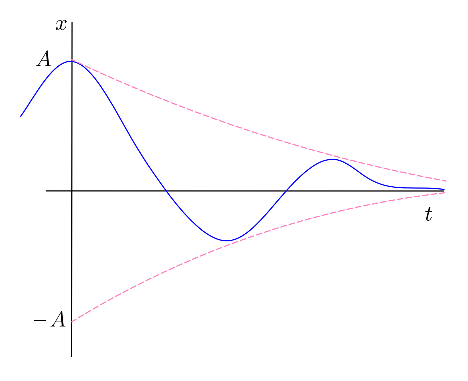


Figura 3.3: Movimiento libre subamortiguado.

(II.2) **Movimiento críticamente amortiguado**: aparece cuando $b^2 = 4mk$. En este caso, la ecuación auxiliar tiene una raíz doble

$$r = -\frac{b}{2m}$$

y la solución general es:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\, e^{-\frac{b}{2m}t}. \tag{3.29}$$

En esta fórmula no aparece oscilación dada por el término senoidal. Para comprender el movimiento descrito por (3.29) analicemos el comportamiento de $x(t)$ cuando t tiende a infinito:

$$\lim_{t\to+\infty} x(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{C_1 + C_2 t}{e^{\frac{b}{2m}t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{C_2}{\frac{b}{2m} e^{\frac{b}{2m}t}} = 0,$$

además:

$$x'(t) = (C_2 - \frac{b}{2m} C_1 - \frac{b}{2m} C_2 t) e^{-\frac{b}{2m}t}$$

es idénticamente 0 cuando $C_1 = C_2 = 0$ o a lo sumo se anula en un punto. Si no tenemos en cuenta la solución trivial, se deduce que $x(t)$ tiene a lo sumo un máximo o un mínimo local para $t > 0$, por tanto, no oscila. Cualitativamente tenemos tres posibilidades de movimiento dependiendo de las condiciones iniciales (ver Figura 3.4).

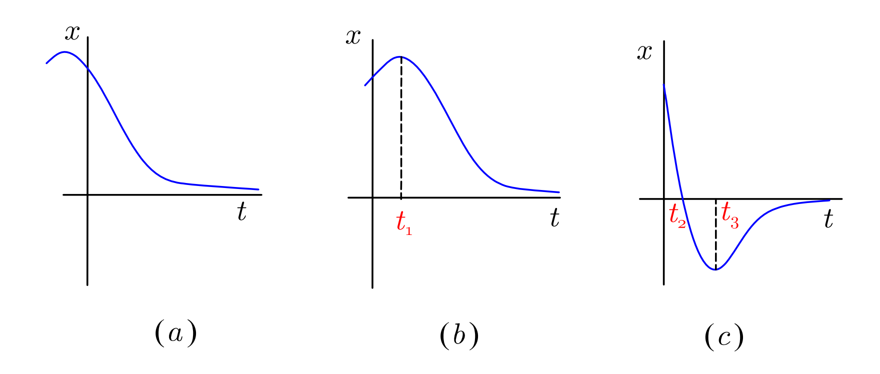


Figura 3.4: Movimiento críticamente amortiguado.

En el caso (a) la masa m no pasa por la posición de equilibrio ni alcanza un desplazamiento extremo relativo para $t > 0$. Simplemente se aproxima al equilibrio monótonamente cuando t tiende a $+\infty$.

En el caso (b) la masa no pasa por la posición de equilibrio para $t > 0$, pero su desplazamiento alcanza un extremo único para $t = t_1 > 0$. Después, la masa tiende monótonamente a la posición de equilibrio cuando t tiende a $+\infty$.

En el caso (c) la masa pasa por su posición de equilibrio una vez, en $t = t_2 > 0$; luego alcanza su desplazamiento extremo en $t = t_3$, tendiendo al equilibrio de forma monótona cuando t tiende a $+\infty$.

Este movimiento se llama críticamente amortiguado porque si b disminuyese de valor aparecería la oscilación.

(II.3) **Movimiento sobremortiguado**: se obtiene cuando $b^2 > 4mk$. En este caso, existen dos raíces reales distintas en la ecuación auxiliar:

$$r_1 = -\frac{b}{2m} + \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m},$$
$$r_2 = -\frac{b}{2m} - \frac{\sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

y la solución general es:

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}.$$

Es obvio que $r_2 < 0$ y, puesto que $b^2 > b^2 - 4mk$, se tiene que $b > \sqrt{b^2 - 4mk}$ y $r_1 < 0$. Luego ambas raíces son negativas, por tanto:

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 0.$$

Además:

$$x'(t) = e^{r_1 t}(C_1 r_1 + C_2 r_2 e^{(r_2 - r_1)t});$$

por tanto, $x'(t) = 0$ si y sólo si $C_1 r_1 + C_2 r_2 e^{(r_2 - r_1)t} = 0$. Por consiguiente, una solución no trivial puede tener a lo sumo un máximo o un mínimo local para $t > 0$. El movimiento es cualitativamente igual al descrito en el caso anterior.

(III) Vibraciones forzadas

Consideremos ahora las vibraciones de un sistema masa-resorte cuando se aplica una fuerza externa, definida por $f(t)$ en la ecuación (3.26). Es de particular interés la respuesta del sistema a un término de forzamiento periódico. Tomemos como ejemplo una función de forzamiento cosenoidal:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\gamma t)$$

donde F_0 y γ son constantes no negativas.

(III.1) En el caso de un movimiento subamortiguado, puesto que $b^2 < 4mk$, las raíces de la ecuación auxiliar son $\alpha \pm i\beta$ con $\alpha = -\frac{b}{2m}$ y $\beta = \frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}$ y la solución de la ecuación homogénea asociada es:

$$x_h(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t} \sin\left(\frac{\sqrt{4mk - b^2}}{2m}t + \phi\right). \quad (3.30)$$

Hallemos ahora una solución particular por el método de los coeficientes indeterminados. Como $\pm\gamma i$ no es raíz de la ecuación auxiliar, esta solución será de la forma:

$$x_p(t) = A_1 \cos(\gamma t) + A_2 \sin(\gamma t),$$

con A_1 y A_2 constantes a determinar. Para ello, derivamos dos veces,

$$x'(t) = -\gamma A_1 \sin(\gamma t) + \gamma A_2 \cos(\gamma t),$$
$$x''(t) = -\gamma^2 A_1 \cos(\gamma t) - \gamma^2 A_2 \sin(\gamma t)$$

y sustituimos en la ecuación diferencial,

$$(k-\gamma^2 m)\left(A_1 \cos(\gamma t) + A_2 \sin(\gamma t)\right) + \gamma b\left(-A_1 \sin(\gamma t) + A_2 \cos(\gamma t)\right) = F_0 \cos(\gamma t).$$

Igualando términos, llegamos a un sistema con incógnitas A_1 y A_2:

$$\left.\begin{array}{rcl} (k-\gamma^2 m)A_1 + \gamma b A_2 & = & F_0 \\ -\gamma b A_1 + k - \gamma^2 m)A_2 & = & 0. \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, tenemos:

$$A_1 = \frac{F_0(k-\gamma^2 m)}{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{F_0 \gamma b}{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}.$$

Por tanto, una solución particular viene dada por:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}\left((k-\gamma^2 m)t\cos(\gamma t) + b\gamma \sin(\gamma t)\right).$$

Podemos escribir la solución de la forma:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}} \sin(\gamma t + \theta), \qquad (3.31)$$

introduciendo un ángulo θ definido por $\tan\theta = \frac{k-\gamma^2 m}{b\gamma}$. Combinando la solución homogénea (3.30) y la solución particular (3.31) llegamos a la solución general:

$$x(t) = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\sin\left(\frac{\sqrt{4mk-b^2}}{2m}t + \phi\right) + \frac{F_0}{\sqrt{(k-\gamma^2 m)^2 + b^2\gamma^2}}\sin(\gamma t + \theta).$$

El primer sumando de esta expresión es el **término transitorio**, representa una oscilación amortiguada y sólo depende de los parámetros del sistema y de las condiciones iniciales, que tienden a cero cuando t tiende a $+\infty$, debido al factor de amortiguación $e^{-\frac{b}{2m}t}$; por eso recibe el nombre de **solución transitoria**.

El segundo sumando es el **término estacionario**, función senoidal con frecuencia angular γ.

El término estacionario se encuentra desfasado con respecto a la fuerza externa $f(t) = \cos\gamma t$ por el ángulo $\theta - \frac{\pi}{2}$:

$$\sin(\gamma t + \theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\gamma t + \theta)\right) = \cos\left(\gamma t - \frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\left(\gamma t - (\frac{\pi}{2} - \theta)\right).$$

A medida que el término transitorio va desapareciendo el movimiento del sistema masa-resorte llega a ser esencialmente representado por el segundo término $x_p(t)$. Por eso se le llama **solución estacionaria**.

El factor $\frac{1}{\sqrt{(k-\gamma^2 m)^2+b^2\gamma^2}}$ llamado **factor de ganancia**, es lo que se gana en amplitud.

Podemos observar que si b es muy pequeño y el valor de γ es próximo a $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$, el movimiento es ligeramente amortiguado y la frecuencia impresa, $\dfrac{\gamma}{2\pi}$, es cercana a la frecuencia natural. En este caso, la amplitud es muy grande y se produce un fenómeno conocido como **resonancia**.

(III.2) Estudiemos ahora el caso de las vibraciones forzadas cuando no hay amortiguación. La ecuación que describe el movimiento es:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F_0 \cos(\gamma t).$$

La solución de la parte homogénea viene dada por (3.27), obtenida en el primer caso estudiado.

Una solución particular es:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{(k-\gamma^2 m)} \sin(\gamma t + \theta),$$

si $\gamma \neq \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, obtenida a partir de (3.31) haciendo $b = 0$.

O bien es de la forma:

$$x_p(t) = A_1 t \cos(\gamma t) + A_2 t \sin(\gamma t)$$

si $\gamma = \omega$, con A_1 y A_2 a determinar. Aplicando el método de los coeficientes indeterminados, llegamos a:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega} t \sin(\gamma t).$$

Así, si $\gamma = \omega$, la solución general es:

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi) + \frac{F_0}{2m\omega} t \sin(\gamma t).$$

Por el segundo sumando, vemos que las oscilaciones se volverían infinitas, el sistema se rompería y la ecuación dejaría de ser aplicable. La aplicación de una fuerza periódica de frecuencia cercana o igual a la frecuencia de las oscilaciones libres no amortiguadas puede causar un serio problema en cualquier sistema mecánico oscilatorio.

Ejemplo 3.29. En el estudio de un resorte vibratorio con amortiguación se llega a un problema de valor inicial de la forma:

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0$$

siendo $x(t)$ el desplazamiento medido a partir de la posición de equilibrio en un instante t y donde:
m = masa sujeta al sistema,
b = constante de amortiguación,
k = constante del resorte,
x_0 = desplazamiento inicial,
v_0 = velocidad inicial.

Determinemos la ecuación del movimiento de este sistema cuando $m = 36$ kg, $b = 12$ kg/sg, $k = 37$ kg/sg^2, $x_0 = 70$ cm y $v_0 = 10$ cm/sg. Halla el desplazamiento al cabo de 10 segundos.

Solución. Buscamos la solución de la ecuación diferencial:

$$36x'' + 12x' + 37x = 0$$

con condiciones iniciales $x(0) = 70$ y $x'(0) = 10$. La ecuación auxiliar asociada es:

$$36r^2 + 12r + 37 = 0$$

cuyas raíces son $r = -\frac{1}{6} \pm i$. Por tanto, la solución general es:

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{1}{6}t} \cos t + C_2 e^{-\frac{1}{6}t} \sin t.$$

Sustituyendo $x(0) = 70$, tenemos que $70 = C_1$. Para sustituir la otra condición inicial debemos derivar $x(t)$:

$$x'(t) = -\frac{1}{6} C_1 e^{-\frac{1}{6}t} \cos t - C_1 e^{-\frac{1}{6}t} \sin t - \frac{1}{6} C_2 e^{-\frac{1}{6}t} \sin t + C_2 e^{-\frac{1}{6}t} \cos t;$$

sustituyendo ahora $x'(0) = 10$, se tiene:

$$10 = -\frac{1}{6} C_1 + C_2, \text{ de donde } C_2 = \frac{65}{3}$$

y la solución del problema de valor inicial es:

$$x(t) = 70 e^{-\frac{1}{6}t} \cos t + \frac{65}{3} e^{-\frac{1}{6}t} \sin t.$$

Al cabo de 10 segundos, el desplazamiento será:

$$x(10) = 70 e^{-\frac{5}{3}} \cos 10 + \frac{65}{3} e^{-\frac{5}{3}} \sin 10 \simeq -13{,}32 \text{ cm.} \quad \blacksquare$$

Ejemplo 3.30. Resolvamos el problema de valor inicial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = F_0 \sin \gamma t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0,$$

con F_0 constante.

Solución. Como hemos visto, la solución de la ecuación homogénea es:

$$x_h(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t).$$

Una solución particular para $\omega \neq \gamma$, calculada por el método de los coeficientes indeterminados, resulta:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \sin(\gamma t)$$

y la solución general que se obtiene es:

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t) + \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2} \sin(\gamma t).$$

Sustituyendo las condiciones iniciales obtenemos:

$$C_1 = 0 \quad \text{y} \quad C_2 = -\gamma \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)}.$$

La solución del problema de valor inicial es:

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} \left(-\gamma \sin \omega t + \omega \sin(\gamma t)\right), \quad \omega \neq \gamma.$$

Aunque esta ecuación no está definida para $\omega = \gamma$, es interesante observar el caso límite cuando γ tiende a ω. Este proceso límite es análogo a sintonizar la frecuencia de la fuerza impulsora, $\frac{\gamma}{2\pi}$, a la frecuencia de las oscilaciones libres, $\frac{\omega}{2\pi}$. Para $\omega = \gamma$ definimos la solución como un límite que resolvemos por la regla de L'Hôpital,

$$x(t) = \lim_{\gamma \to \omega} F_0 \frac{\gamma \sin(\omega t) + \omega \sin(\gamma t)}{\omega(\omega^2 - \gamma^2)} = \frac{F_0}{2\omega^2} \sin(\omega t) - \frac{F_0}{2\omega} t \cos(\omega t).$$

Observamos que cuando t tiende a infinito los desplazamientos se hacen grandes y se obtiene el fenómeno de resonancia. ■

3.3.2. Circuitos eléctricos

Utilizando las leyes de Newton hemos establecido las fuerzas que actúan en un sistema mecánico. Leyes análogas, conocidas como leyes de Kirchhoff, nos permiten establecer la relación entre las fuerzas que aportan y consumen energía en un circuito eléctrico.

Consideremos un circuito eléctrico simple: la fuente de energía es una batería o un generador, E; ésta proporciona la energía en forma de fluido eléctrico de partículas cargadas, cuya velocidad se llama *corriente*. La fuente de energía producirá este flujo cuando la llave se mueva de A a B, es decir, cuando el circuito está cerrado (ver Figura 3.5). La fuerza electromotriz de la batería (f.e.m.) es igual (numéricamente) a la energía aplicada por la batería cuando una unidad de carga ha dado una vuelta completa al circuito. Tomemos como unidad de f.e.m el *voltio*.

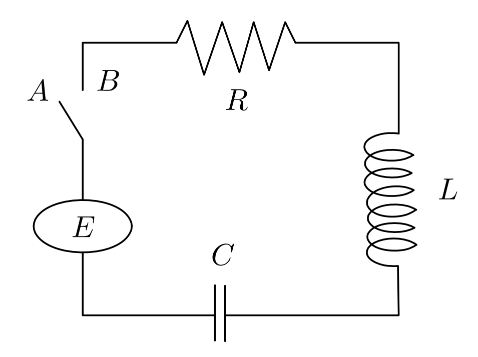


Figura 3.5: Circuito eléctrico RLC.

Los otros tres elementos del circuito, la resistencia R, el condensador C y el inductor L son consumidores de energía. En términos no técnicos, significa que se necesita una cierta cantidad de energía para mover el fluido eléctrico de partículas cargadas a través de estas barreras. Expresamos la energía que cada uno consume mediante la *caída de voltaje* a través de él (o diferencia de potencial entre el punto final e inicial), que se mide con un voltímetro. Las caídas de voltaje a través de cada elemento verifican las siguientes leyes:

- Ley de Ohm: la caída de voltaje a través de una resistencia es proporcional a la corriente que fluye por ella:

  $$V_R = R\,I$$

  donde R es una constante de proporcionalidad denominada resistencia e I es la intensidad de corriente, es decir, la razón de cambio de la carga q o velocidad de q, $I = \frac{dq}{dt}$, que se mide en amperios. La resistencia R se mide en ohmnios (Ω).

- Ley de Faraday: la caída de voltaje a través del inductor es proporcional a la tasa de cambio de la corriente:

  $$V_L = L\,\frac{dI}{dt}.$$

  La constante L se denomina inductancia y se mide en henrios (H).

- Ley de Coulomb: la caída de voltaje a través de un condensador es proporcional a la carga en el condensador:

  $$V_C = \frac{1}{C}\,q.$$

  La constante C recibe el nombre de capacidad o capacitancia y se mide en faradios (F) y la carga q del circuito se mide en coulombios.

La ley fundamental de conservación de un circuito eléctrico, llamada ley de Kirchhoff para el voltaje, establece que la suma de las caídas de voltaje en los elementos R, L y C es igual a la fuerza electromotriz total en un circuito cerrado:

$$L\,\frac{dI(t)}{dt} + R\,I(t) + \frac{1}{C}\,q(t) = E(t). \tag{3.32}$$

Puesto que $I = \dfrac{dq}{dt}$, obtenemos la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden para la carga $q(t)$:

$$L\,\frac{d^2q(t)}{dt^2} + R\,\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}\,q(t) = E(t).$$

Podemos observar la analogía existente entre esta ecuación y la ecuación diferencial obtenida para las vibraciones mecánicas (3.26):

Sistema mecánico:	Sistema eléctrico:
masa m	inductancia L
constante amortiguación b	resistencia R
constante del resorte k	inversa de la capacitancia $\frac{1}{C}$
fuerzas externas $F(t)$	f.e.m. $E(t)$
desplazamiento $x(t)$	carga $q(t)$
velocidad $v(t) = \frac{dx}{dt}$	corriente $I(t) = \frac{dq}{dt}$

Por tanto, los resultados obtenidos para los sistemas mecánicos se aplican también a los sistemas eléctricos. Esta analogía es de gran importancia ya que permite predecir el funcionamiento de sistemas mecánicos mediante el estudio de circuitos eléctricos, donde las medidas son más exactas y simples.

Si derivamos en la ecuación (3.32), obtenemos una ecuación diferencial lineal de segundo orden para la corriente $I(t)$:

$$L\,\frac{d^2I}{dt^2} + R\,\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}\,I = \frac{dE}{dt} \tag{3.33}$$

Además, de la ecuación (3.32) podremos obtener $I'(t_0)$ cuando tengamos las condiciones iniciales $I(t_0)$ y $q(t_0)$.

Veamos un ejemplo en el que la fuente de voltaje externa es periódica.

Ejemplo 3.31. Consideremos un circuito eléctrico simple RLC donde $R = 80\ \Omega$, $L = 20$ H y $C = 10^{-2}$ F y con voltaje externo $E(t) = 50\sin(2t)$. Determinemos la intensidad de corriente en el circuito en cada instante t.

Solución. Sustituyendo los datos del problema en la ecuación (3.33) tenemos:

$$20\,\frac{d^2I}{dt^2} + 80\,\frac{dI}{dt} + \frac{1}{10^{-2}}\,I = 100\cos(2t).$$

Dividiendo por 20 se tiene:

$$I'' + 4I' + 5\,I = 5\cos(2t).$$

El polinomio característico es $p(r) = r^2+4r+5$, cuyas raíces son los valores propios $r_{1,2} = -2\pm i$. Por tanto, la solución de la ecuación homogénea asociada es:

$$I_h(t) = C_1e^{-2t}\cos t + C_2e^{-2t}\sin t.$$

Para hallar la solución particular, supondremos que ésta es de la forma:

$$I_p(t) = t^h(A\cos(2t) + B\sin(2t))$$

con h =orden de multiplicidad de $\pm 2i$ en la ecuación auxiliar, por tanto $h = 0$. Derivando y sustituyendo en la ecuación se tiene:

$$(-4A\cos(2t) - 4B\sin(2t)) + 4(-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t)) \\ +5(A\cos(2t) + B\sin(2t)) = 5\cos(2t),$$

identificando coeficientes:

$$\begin{cases} A+8B=5 \\ B-8A=0 \end{cases} \quad \text{de donde:} \quad \begin{cases} A=\frac{1}{13} \\ B=\frac{8}{13}. \end{cases}$$

La solución general, que nos da la intensidad en cada instante t, viene dada por:

$$I(t) = C_1e^{-2t}\cos t + C_2e^{-2t}\sin t + \frac{1}{13}(\cos(2t) + 8\sin(2t)).$$

Los términos $C_1e^{-2t}\cos t+C_2e^{-2t}\sin t$ son transitorios, tienden a 0 cuando t tiende a infinito. Los otros dos términos de la fórmula tienen la misma frecuencia que la entrada $5\cos(2t)$; representan la corriente periódica de estado estacionario en el circuito. ■

Ejercicios de la sección 3.3

1. La siguiente ecuación diferencial modeliza una oscilación lineal de un sistema masa-resorte:

$$5x'' + 2x' + 2x = 0.$$

   Aplicamos a dicho sistema una fuerza externa dada por $F(t) = 10\cos 2t$, obteniéndose un movimiento forzado. ¿Cuál es la ecuación que modeliza dicho movimiento? Si en el instante inicial desplazamos la masa 2 m por debajo de la posición de equilibrio y la soltamos con velocidad cero, ¿cuál será la posición de la masa al cabo de 10 segundos? Analiza el tipo de movimiento que se tiene antes y después de aplicar la fuerza externa. (Solución: $x(t) = e^{-t/5}\left(\frac{43}{17}\cos\left(\frac{3t}{5}\right) + \frac{23}{51}\sin\left(\frac{3t}{5}\right)\right)+\frac{1}{17}(2\sin(2t) - 9\cos(2t))$; 0.202992 m).

2. Una masa de 0,5 kg se sujeta a un resorte suspendido del techo; esto ocasiona que el resorte se estire 0,98 m al llegar al reposo en equilibrio. En el instante $t = 0$, la masa se desplaza 1 m hacia abajo, y se suelta; en el mismo instante se aplica una fuerza externa $f(t) = 2\cos(2t)$ N al

sistema. Si la constante de amortiguación es de 1 N.sg/m, determina el desplazamiento $x(t)$ de la masa en un instante $t > 0$ cualquiera. Considera $g = 9{,}8$ m/sg^2. (Solución: $x(t) = e^{-t}\left(\frac{7}{13}\cos(3t) - \frac{1}{39}\sin(3t)\right) + \frac{6}{13}\cos(2t) + \frac{4}{13}\sin(2t)$).

3. La suspensión de un automóvil se puede modelizar como un muelle que vibra con amortiguamiento debido a los amortiguadores. Esto lleva a la ecuación:

$$mx''(t) + bx'(t) + kx(t) = 0,$$

donde m es la masa del automóvil, b es la constante de amortiguamiento de los amortiguadores, k es la constante del muelle y $x(t)$ es el desplazamiento vertical del automóvil en el tiempo t. Si la masa del automóvil es de 1000 kg y la constante del muelle es 3000 kg/sg^2, determinad el valor mínimo de la constante de amortiguamiento b (en kg/sg) que proporcionará un viaje libre de oscilaciones. Si reemplazamos los muelles por otros que tienen una constante k doble que la anterior, ¿cómo varía este valor mínimo de b? (Solución: $b = 2000\sqrt{3}$; $\sqrt{2}b$).

4. Una fuerza de 400 N estira un resorte de 2 m, Una masa de 50 kg se sujeta de un extremo del resorte, el cual pende verticalmente de un soporte, y se suelta desde la posición de equilibrio con una velocidad dirigida hacia arriba de 10 m/sg. Encuentra la ecuación del movimiento. Determina la amplitud, periodo y frecuencia del movimiento generado. ¿ En qué instante pasa el cuerpo por la posición de equilibrio, en dirección hacia abajo, por tercera vez? (Solución: $x(t) = 5\sin(2t)$; $A = 5$; $P = \pi$; $\omega = \frac{1}{\pi}$; al cabo de π sg.).

5. Consideremos un circuito eléctrico simple RLC con $R = 10\ \Omega$, $L = 0{,}1$ H y $C = 2 \times 10^{-3}$ F y con voltaje externo $E(t) = 122\sin(10t)$. Si para $t = 0$, la intensidad y la carga son nulas, determina la intensidad de corriente en el circuito en cada instante t. (Solución: $I(t) = e^{-50t}\left(-\frac{98}{41}\cos(50t) - \frac{102}{41}\sin(50t)\right) + \frac{98}{41}\cos(10t) + \frac{20}{41}\sin(10t)$).

6. Determina la carga y la corriente en el tiempo t de un circuito eléctrico RLC con un resistor $R = 40\,\Omega$, un inductor $L = 1\,$H, una capacitancia $C = 16\times 10^{-4}\,$F y una fuerza electromotriz (suministrada por una batería o un generador) $E(t) = 100\cos 10t$, siendo la carga inicial y la corriente 0. (Solución: $q(t) = e^{-20t}\left(-\frac{84}{697}\cos(15t) - \frac{464}{2091}\sin(15t)\right) + \frac{84}{697}\cos(10t) + \frac{64}{697}\sin(10t)$; $I(t) = e^{-20t}\left(-\frac{640}{697}\cos(15t) + \frac{13060}{2091}\sin(15t)\right) + \frac{640}{697}\cos(10t) - \frac{840}{697}\sin(10t)$).

7. Halla la carga $q(t)$ en el capacitor de un circuito simple RLC en cada instante t sabiendo que $R = 20\ \Omega$, $L = 10$ H, $C = 0{,}01$ F y $E(t) = 30\cos 2t$ voltios. Inicialmente la carga y la intensidad son nulas. (Solución: $q(t) = -\frac{9}{26}e^{-t}\cos 3t - \frac{7}{26}e^{-t}\sin 3t + \frac{9}{26}\cos 2t + \frac{3}{13}\sin 2t$).

3.4. Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

3.4.1. Teoría básica

La teoría para las ecuaciones lineales de orden n es una generalización de la vista para el caso de ecuaciones de segundo orden.

■ **Definición 3.4.** Una **ecuación diferencial lineal de orden n** es aquélla que se puede expresar de la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_o(x)y = b(x).$$

Si los coeficientes de y y de sus derivadas son constantes, se dice que es una **ecuación con coeficientes constantes**.

Si $b(x) \equiv 0$ la ecuación se llama **homogénea**, en caso contrario se denomina **no homogénea**.

Suponiendo $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x), b(x)$ funciones continuas en el intervalo $]a, b[$ y $a_n(x) \not\equiv 0$ en (a, b), podemos dividir por $a_n(x)$ y expresar la ecuación en forma canónica:

$$y^{n)}(x) + p_{n-1}(x)y^{n-1)}(x) + ... + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y(x) = g(x) \qquad (3.34)$$

donde $p_{n-1}, ..., p_0$ y g son continuas en un intervalo $]a, b[$.

Bajo estas condiciones, el problema de valor inicial siempre tiene solución única, pues se tiene el siguiente teorema.

■ **Teorema 3.7.** Sean p_{n-1}, ..., p_0, g funciones continuas en algún intervalo $]a, b[$ que contiene al punto x_o; entonces, para cualquier elección de los valores y_0, y_1, ..., y_{n-1} existe una única solución del problema de valor inicial

$$y^n + p_{n-1}(x)y^{n-1} + ... + p_1(x)y' + p_0(x)y = g(x), \quad \text{con la condición inicial}$$
$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}.$$

Dadas n funciones diferenciables $y_1, \cdots, y_n$, se denomina **wronskiano** de $y_1, \cdots, y_n$ a la función dada por:

$$W[y_1, \cdots, y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & ... & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & ... & y_n'(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{n-1)}(x_0) & ... & y_n^{n-1)}(x_0) \end{vmatrix}.$$

El siguiente teorema nos proporciona la expresión para la solución general de una ecuación homogénea:

■ **Teorema 3.8.** Sean $y_1, \cdots, y_n$ soluciones en $]a,b[$ de la ecuación homogénea

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0, \tag{3.35}$$

donde $p_i(x)$ son funciones continuas en $]a,b[$. Si para algún x_0 de $]a,b[$ estas soluciones verifican que $W[y_1,...,y_n](x_0) \neq 0$, entonces toda solución de (3.35) en $]a,b[$ se puede expresar de la forma:

$$y(x) = C_1y_1(x) + ... + C_ny_n(x), \tag{3.36}$$

siendo $C_1,...,C_n$ constantes.

A $\{y_1,...,y_n\}$ se le llama **conjunto fundamental de soluciones** de la ecuación (3.35) y la expresión (3.36) recibe el nombre de **solución general**.

■ **Nota 3.5.** La condición $W[y_1,...,y_n](x_0) \neq 0$, para algún x_0 de $]a,b[$, nos asegura que las funciones $y_1,...,y_n$ son linealmente independientes en $]a,b[$. De hecho, esta condición es fácil de comprobar en el caso de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales debido al siguiente resultado:

■ **Propiedad 3.1.** Si las funciones $y_1,...,y_n$ son soluciones de una ecuación diferencial lineal de orden n en $]a,b[$, entonces su wronskiano no se anula en $]a,b[$ o es idénticamente nulo en $]a,b[$.

De la misma forma que para las ecuaciones diferenciales de orden 2, la solución general de una ecuación lineal de orden n se obtiene sumando una solución particular de dicha ecuación y la solución general de la homogénea asociada:

■ **Teorema 3.9.** Sea $y_p(x)$ una solución particular de la ecuación no homogénea

$$y^{n)} + p_{n-1}(x)y^{n-1)}(x) + ... + p_1(x)y'(x) + p_0(x)y = g(x) \tag{3.37}$$

en $]a,b[$ y sea $\{y_1,...,y_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada.

Entonces, toda solución de (3.37) en $]a,b[$ se expresa de la forma:

$$y(x) = C_1y_1(x) + ... + C_ny_n(x) + y_p(x).$$

Una vez vista la forma de la solución general de una ecuación diferencial de orden n, veamos cómo hallar un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea asociada, para el caso de ecuaciones con coeficientes constantes, y una solución particular de la ecuación completa.

3.4.2. Solución general de las ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

Consideremos la ecuación homogénea lineal con coeficientes constantes

$$a_ny^{n)} + a_{n-1}y^{n-1)}(x) + ... + a_1y'(x) + a_0(x)y = 0 \tag{3.38}$$

con $a_n \neq 0$. Dado que las constantes son funciones continuas en $\mathbb{R}$, esta ecuación tiene solución definida en todo $\mathbb{R}$.

Como ya hemos visto, resolver una ecuación diferencial lineal de orden n se reduce a encontrar un conjunto fundamental de soluciones. Generalizamos, para las ecuaciones de orden n, el estudio realizado en el caso de las ecuaciones de segundo orden: suponemos que las soluciones son de la forma $y = e^{rx}$. Sustituyendo en la ecuación diferencial, llegamos a la conclusión de que este tipo de funciones será solución si r es raíz de la **ecuación auxiliar**:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_1 r + a_0 = 0.$$

Veamos cómo construir un conjunto fundamental de soluciones dependiendo de las raíces de esta ecuación auxiliar.

(I) Si se obtienen n raíces reales y distintas $r_1, ..., r_n$, entonces $\{e^{r_1 x}, ..., e^{r_n x}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (3.38) y la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + ... + C_n e^{r_n x}.$$

(II) Por cada pareja $\alpha \pm i\beta$ solución de la ecuación auxiliar, entonces $e^{(\alpha+i\beta)x}$ y $e^{(\alpha-i\beta)x}$ son soluciones complejas, a partir de las cuales se obtienen las soluciones reales y linealmente independientes: $e^{\alpha x}\cos\beta x$ y $e^{\alpha x}\sin\beta x$ que forman parte del conjunto fundamental de soluciones.

(III) Para cada raíz r de multiplicidad m, las funciones

$$e^{rx}, xe^{rx}, x^2 e^{rx}, ..., x^{m-1} e^{rx}$$

son soluciones y además linealmente independientes, luego forman parte del conjunto fundamental de soluciones.

Utilizando los resultados de estos tres casos se puede obtener un conjunto de n soluciones linealmente independientes que nos conducen a la solución general.

Ejemplo 3.32. Hallemos la solución general de las siguientes ecuaciones:

(a) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0$.

(b) $y''' + y'' + 3y' - 5y = 0$.

(c) $y^{IV} - y''' - 3y'' + 5y' - 2y = 0$.

(d) $y^{IV} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25y = 0$.

Solución.

(a) La ecuación auxiliar correspondiente es: $r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 1$, $r_2 = -2$ y $r_3 = 3$. Por tanto, $\{e^x, e^{-2x}, e^{3x}\}$ es un conjunto fundamental de soluciones y la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{3x}.$$

(b) La ecuación auxiliar correspondiente es: $r^3 + r^2 + 3r - 5 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 1$, y el par de complejas $r_{2,3} = -1 \pm 2i$. Por tanto, $\{e^x,\ e^{-x}\cos 2x,\ e^{-x}\sin 2x\}$ es un conjunto fundamental de soluciones y la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}\cos 2x + C_3 e^{-x}\sin 2x.$$

(c) La ecuación auxiliar correspondiente es: $r^4 - r^3 - 3r^2 + 5r - 2 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = -2$ con orden de multiplicidad 1 y $r_2 = 1$ con orden de multiplicidad 3. Por tanto, $\{e^{-2x},\ e^x,\ xe^x,\ x^2e^x\}$ es un conjunto fundamental de soluciones y la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + C_3 x e^x + C_4 x^2 e^x.$$

(d) La ecuación auxiliar correspondiente es: $r^4 - 8r^3 + 26r^2 - 40r + 25 = 0$, es decir, $(r^2 - 4r + 5)^2 = 0$, cuyas raíces son el par de complejas $r_{1,2} = 2 \pm i$ con orden de multiplicidad 2. Por tanto, $\{e^{2x}\cos x,\ e^{2x}\sin x,\ xe^{2x}\cos x,\ xe^{2x}\sin x\}$ es un conjunto fundamental de soluciones y la solución general es:

$$y(x) = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x + C_3 x e^{2x}\cos x + C_4 x e^{2x}\sin x. \ \blacksquare$$

3.4.3. Ecuaciones no homogéneas

Para hallar una solución particular de una ecuación lineal de orden n no homogénea podemos aplicar alguno de los siguientes métodos:

(I) Método de los coeficientes indeterminados

La forma en que se obtiene la solución particular $y_p(x)$ depende de la parte no homogénea de la ecuación diferencial y no del orden de dicha ecuación. Por tanto, los casos vistos para las ecuaciones de segundo orden siguen siendo válidos para ecuaciones de orden superior. Lo podemos aplicar si la ecuación tiene coeficientes constantes y el término no homogéneo es una función polinómica, exponencial, seno, coseno o suma finita de éstas.

Ejemplo 3.33. Resolvamos la ecuación diferencial:

$$3y''' + 5y'' + y' - y = 3x^2 - 10.$$

Solución. Hallamos primero la solución general de la parte homogénea. La ecuación auxiliar es $3r^3 + 5r^2 + r - 1 = 0$, cuyas raíces son $r_1 = 1/3$ y $r_2 = -1$, con orden de multiplicidad 1 y 2, respectivamente. Por tanto, tenemos:

$$y_h(x) = C_1 e^{\frac{1}{3}x} + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}.$$

Puesto que el término no homogéneo es $g(x) = 3x^2 - 10$, supondremos una solución particular de la forma:

$$y_p(x) = (Ax^2 + Bx + C)x^h,$$

con $h=0$, que es el orden de multiplicidad de 0 en la ecuación auxiliar y A, B y C a determinar. Para ello, derivamos y_p :

$$y_p'(x) = 2Ax + B, \quad y_p''(x) = 2A, \quad y_p'''(x) = 0$$

y sustituimos en la ecuación diferencial:

$$10A + 2Ax + B - Ax^2 - Bx - C = 3x^2 - 10.$$

Igualando coeficientes, obtenemos que $A = -3$, $B = -6$ y $C = -26$. Luego la solución particular es:

$$y_p(x) = -3x^2 - 6x - 26$$

y la solución general de la ecuación completa es:

$$y(x) = C_1 e^{\frac{1}{3}x} + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} - 3x^2 - 6x - 26. \blacksquare$$

(II) Método de variación de parámetros

Veamos cómo generalizar el método de variación de parámetros para ecuaciones lineales de orden superior. Para hallar una solución particular de una ecuación de la forma (3.34), $L[y](x) = g(x)$, necesitamos conocer previamente un conjunto fundamental de soluciones $\{y_1, \cdots, y_n\}$, de modo que, si la solución general de la homogénea asociada es:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)$$

con $C_1, ..., C_n$ constantes arbitrarias, se supone que existe una solución particular de la ecuación completa de la forma:

$$y_p(x) = v_1(x) y_1(x) + v_2(x) y_2(x) + ... + v_n(x) y_n(x) \tag{3.39}$$

con $v_1, ...v_n$ funciones a determinar.

Para ello se requieren n ecuaciones. En primer lugar, derivamos y_p:

$$y_p'(x) = (v_1 y_1' + \cdots + v_n y_n') + (v_1' y_1 + \cdots + v_n' y_n) \, .$$

Para evitar la aparición de derivadas segundas, y de orden superior en posteriores cálculos imponemos que el primer paréntesis sea cero, es decir,

$$v_1' y_1 + \cdots + v_n' y_n = 0.$$

Análogamente, al calcular $y_p'', \cdots, y_p^{n-1)}$ imponemos $n-2$ condiciones más:

$$\begin{aligned} v_1' y_1' + \cdots + v_n' y_n' &= 0, \\ &\vdots \\ v_1' y_1^{n-2)} + \cdots + v_n' y_n^{n-2)} &= 0, \end{aligned}$$

y la condición n-ésima es que y_p satisfaga la ecuación (3.34). Al utilizar las condiciones anteriores y puesto que $y_1, \cdots, y_n$ son soluciones de la ecuación homogénea, la expresión $L[y_p] = g$ se reduce a:

$$v_1' y_1^{n-1)} + \cdots + v_n' y_n^{n-1)} = g(x).$$

En resumen, buscamos las soluciones del sistema dado por todas estas condiciones:

$$\left.\begin{array}{r} y_1 v_1' + ... + y_n v_n' = 0 \\ \\ y_1' v_1' + ... + y_n' v_n' = 0 \\ \vdots \\ y_1^{n-2)} v_1' + ... + y_n^{n-2)} v_n' = 0 \\ \\ y_1^{n-1)} v_1' + ... + y_n^{n-1)} v_n' = g(x) \end{array}\right\}$$

Aplicando Cramer o resolviendo por cualquier otro método, obtenemos las derivadas de las funciones buscadas:

$$v_k'(x) = \frac{g(x) W_k(x)}{W[y_1, ..., y_n](x)},$$

para $k = 1, ..., n$, siendo $W_k(x)$ el determinante que se obtiene reemplazando, en el wronskiano $W[y_1, ..., y_n](x)$, la columna $k-$ésima por $col[0, ..., 0, 1]$, siendo $col[0, ..., 0, 1]$ el vector columna $(0, ..., 0, 1)$.

Integrando, se tiene que:

$$v_k(x) = \int \frac{g(x) W_k(x)}{W[y_1, ..., y_n](x)}, \quad k = 1, ..., n. \tag{3.40}$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.39) llegamos a la solución particular.

Ejemplo 3.34. Resolvamos la ecuación de Cauchy-Euler de tercer orden:

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^3 \sin x, \quad x > 0.$$

Solución. Hallamos primero la solución general de la parte homogénea. Puesto que se trata de una ecuación de Cauchy-Euler de tercer orden, supondremos que las soluciones son de la forma $y = x^r$. Así, derivando y sustituyendo en la ecuación obtenemos los posibles valores de r, que corresponden a las soluciones de la ecuación indicial $r^3 - 2r^2 - r + 2 = 0$, que son $r_1 = 1$, $r_2 = -1$ y $r_3 = 2$. Por tanto, tenemos:

$$y_h(x) = C_1 x + C_2 x^{-1} + C_3 x^2.$$

Para hallar la solución particular mediante el método de variación de parámetros, tenemos que escribir la ecuación en forma canónica:

$$y''' + \frac{1}{x} y'' - \frac{2}{x^2} y' + \frac{2}{x^3} y = \sin x.$$

Luego $g(x) = \sin x$ y la solución particular será:

$$y_p(x) = v_1(x)\, x + v_2(x)\, x^{-1} + v_3(x)\, x^2 \tag{3.41}$$

con v_1, v_2 y v_3 funciones a determinar dadas por (3.40) con

$$W[x, x^{-1}, x^2](x) = \begin{vmatrix} x & x^{-1} & x^2 \\ 1 & -x^{-2} & 2x \\ 0 & 2x^{-3} & 2 \end{vmatrix} = -6x^{-1},$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^{-1} & x^2 \\ 0 & -x^{-2} & 2x \\ 1 & 2x^{-3} & 2 \end{vmatrix} = 3, \qquad W_2(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & x^2 \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -x^2,$$

$$W_3(x) = \begin{vmatrix} x & x^{-1} & 0 \\ 1 & -x^{-2} & 0 \\ 0 & 2x^{-3} & 1 \end{vmatrix} = -2x^{-1}.$$

Por tanto:

$$v_1(x) = \int \frac{3\sin x}{-6x^{-1}} dx = \int \frac{-x\sin x}{2} dx = \frac{x\cos x - \sin x}{2},$$
$$v_2(x) = \int \frac{-x^2\sin x}{-6x^{-1}} dx = \int \frac{x^3\sin x}{6} dx = \frac{-x^3\cos x}{6} + \frac{x^2\sin x}{2} + x\cos x - \sin x,$$
$$v_3(x) = \int \frac{-2x^{-1}\sin x}{-6x^{-1}} dx = \int \frac{\sin x}{3} dx = \frac{-\cos x}{3}.$$

Sustituyendo en (3.41) y simplificando, tenemos:

$$y_p(x) = \cos x - \frac{\sin x}{x}$$

y la solución general es:

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^{-1} + C_3 x^2 + \cos x - \frac{\sin x}{x}. \blacksquare$$

Ejercicios de la sección 3.4

1. Resuelve las ecuaciones diferenciales:

   (a) $y''' - 3y' + 2y = 0.$

   (b) $y^V + 3y^{IV} + 4y''' + 12y'' + 4y' + 12y = 0.$

   (c) $y''' - 4y'' - 2y' - 15y = 0.$

   (d) $y^{IV} - 2y''' + 2y' - y = 0.$

   (e) $y^{IV} + 4y'' + 4y = 0.$

   (f) $y^{IV} - y''' - 5y'' + y' - 6y = 0.$

(Solución: (a) $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^x + C_3\,x\,e^x$.

(b) $y(x) = C_1e^{-3x} + C_2\cos(\sqrt{2}x) + C_3x\cos(\sqrt{2}x) +$

$C_4\sin(\sqrt{2}x) + C_5x\sin(\sqrt{2}x)$.

(c) $y(x) = C_1e^{5x} + C_2e^{-x/2}\cos(\frac{\sqrt{11}}{2}x) + C_3e^{-x/2}\sin(\frac{\sqrt{11}}{2}x)$.

(d) $y(x) = C_1e^x + C_2xe^x + C_3x^2e^x + C_4e^{-x}$.

(e) $y(x) = C_1\cos(\sqrt{2}x) + C_2\sin(\sqrt{2}x) + C_3x\cos(\sqrt{2}x) + C_4x\sin(\sqrt{2}x)$.

(f) $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + C_3\cos x + C_4\sin x$).

2. Resuelve el problema de valor inicial $3y''' + 5y'' + y' - y = 0$ con condición inicial $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$.
   (Solución: $y(x) = -\frac{9}{16}e^{-x} + \frac{1}{4}xe^{-x} + \frac{9}{16}e^{x/3}$).

3. Resuelve el problema de valor inicial:

$$y''' - 2y'' + y' = e^x, \qquad \text{con} \quad \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = -1. \end{array}$$

   (Solución: $y(x) = -6 + (6 - 4x + \frac{x^2}{2})e^x$).

4. Resuelve las siguientes ecuaciones diferenciales:

   (a) $y''' - 2y'' - 5y' + 6y = xe^{-x}$.
   (b) $y''' - 3y' - 2y = e^x(1 + xe^x)$.
   (c) $y''' - 3y' + 2y = e^x(2x - 1)$.
   (d) $y''' - 2y'' - y' + 2y = \dfrac{2x^3 + x^2 - 4x - 6}{x^4}$.

   (Solución: (a) $y(x) = C_1e^x + C_2e^{3x} + C_3e^{-2x} + \frac{e^{-x}}{32}(4x - 1)$).

   (b) $y(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x} + C_3e^{2x} - \dfrac{e^x}{4} + \dfrac{e^{2x}}{27}(1 - 2x) + \frac{e^{2x}}{18}x^2$).

   (c) $y(x) = C_1e^{-2x} + C_2e^x + C_3xe^x + \frac{e^x}{162}(-10 + 30x - 45x^2 + 18x^3)$.

   (d) $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^x + C_3e^{2x} + \frac{1}{x}$).

5. Escribe una ecuación diferencial que tenga como conjunto fundamental de soluciones

$$\{1, e^{2x}, xe^{2x}\}.$$

TEMA 4

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales

En los temas anteriores hemos visto cómo la modelización de determinados fenómenos reales dan lugar a una ecuación diferencial de orden uno o de orden superior. De modo similar, determinados problemas conducen a un sistema de ecuaciones diferenciales; por ejemplo, sistemas de muelles acoplados, problemas de mezclas con depósitos conectados o circuitos eléctricos compuestos por varias mallas.

Como ya ocurría con las ecuaciones de orden superior, resolver un sistema de ecuaciones diferenciales sólo resulta sencillo en el caso en que las ecuaciones sean lineales y con coeficientes constantes. De hecho, toda ecuación lineal de orden mayor que uno puede transformarse en un sistema de ecuaciones lineales de orden uno. La teoría para resolver sistemas de ecuaciones lineales es análoga a la vista en el tema anterior para las ecuaciones diferenciales lineales.

En el caso de sistemas de ecuaciones no lineales habrá que recurrir a otro enfoque como el estudio cualitativo del comportamiento de las soluciones o la resolución numérica.

Concretamente los objetivos concretos de este tema son:

- Conocer la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales.
- Resolver analíticamente sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.
- Estudiar aplicaciones donde surgen este tipo de sistemas.

4.1. Introducción

Veamos como introducción un problema físico sencillo donde surge un sistema de ecuaciones diferenciales. Consideremos un sistema masa-resorte acoplado, formado por dos masas m_1 y m_2 unidas por dos muelles con constantes k_1 y k_2 (ver Figura 4.1).

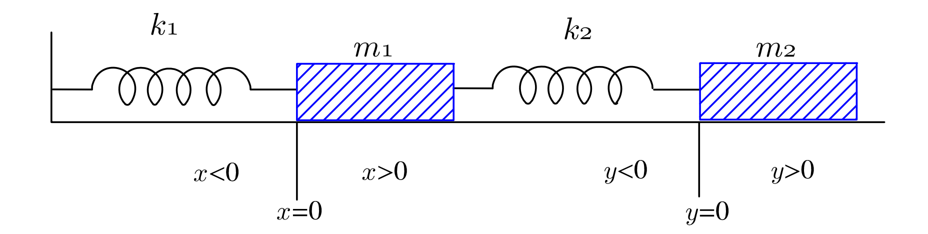


Figura 4.1: Sistema masa-resorte acoplado.

Desplazamos la masa m_1 una distancia x y la masa m_2 una distancia y, considerando $x > 0$, $y > 0$ si el desplazamiento se produce hacia la derecha de la posición de equilibrio y $x < 0$, $y < 0$ si se produce hacia la izquierda. Al soltar las masas, el sistema se pone en movimiento.

Veamos las fuerzas que actúan sobre cada masa. Para ello, aplicaremos la *ley de Hooke*.

- Sobre la masa m_1 actúan dos fuerzas, una fuerza F_1 debida al resorte de constante k_1 y contraria al desplazamiento de la masa m_1 :

  $$F_1 = -k_1 x(t)$$

  y una fuerza F_2 debida al resorte de constante k_2 cuyo signo y dirección viene determinado por el signo de $y(t) - x(t)$; es decir, depende de que dicho muelle haya sido estirado, si el desplazamiento de la masa m_2 es mayor que el de la masa m_1, o contraído si ocurre lo contrario:

  $$F_2 = k_2(y(t) - x(t)).$$

- Sobre la masa m_2 actúa una fuerza F_3 debida al resorte de constante k_2:

  $$F_3 = -k_2(y(t) - x(t)).$$

Aplicando ahora la segunda ley de Newton, llegamos al sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 \dfrac{d^2x}{dt^2} = -k_1 x + k_2(y - x) \\ \\ m_2 \dfrac{d^2y}{dt^2} = -k_2(y - x). \end{array} \right.$$

Es decir, tenemos un sistema de dos ecuaciones lineales de orden dos:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1\, x'' + (k_1 + k_2)\, x - k_2\, y = 0 \\ \\ m_2\, y'' + k_2\, y - k_2\, x = 0. \end{array} \right.$$

Observemos que el sistema anterior se puede reducir a una sola ecuación diferencial lineal en x mediante un método de eliminación, esto es, despejando y en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda, obteniendo en este caso una ecuación lineal de orden 4:

$$\frac{m_2 m_1}{k_2} x^{IV)} + \left(\frac{m_2(k_1+k_2)}{k_2} + m_1 \right) x'' + k_1 x = 0.$$

Además, una ecuación diferencial de orden n de la forma:

$$x^{n)} = f(t, x, x', ..., x^{n-1)})$$

puede escribirse como un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden. En efecto, haciendo $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x'(t) = x_1'(t)$, ..., $x_n(t) = x^{n-1)}(t) = x_{n-1}'(t)$ se obtiene el sistema:

$$\begin{cases} x_1' = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}'(t) = x_n(t) \\ x_n'(t) = x^{n)}(t) = f(t, x, x', ..., x^{n-1)}) = f(t, x_1, ..., x_n). \end{cases}$$

Ejemplo 4.1. Transformemos la siguiente ecuación diferencial lineal en un sistema:

$$x''' - 6x'' + 4x' + x = \sin t.$$

Solución. Haciendo $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x'(t) = x_1'(t)$, $x_3(t) = x''(t) = x_2'(t)$, tenemos:

$$\begin{cases} x_1' = x_2(t) \\ x_2'(t) = x_3(t) \\ x_3'(t) = 6x_3(t) - 4x_2(t) - x_1(t) + \sin t. \ \blacksquare \end{cases}$$

Como vemos, existe un paralelismo entre las ecuaciones diferenciales de orden n en la variable x y los sistemas de n ecuaciones de primer orden para las variables $x_1(t) = x$, $x_2(t) = x'(t)$, ..., $x_n(t) = x^{n-1)}(t)$. Esto presenta una gran ventaja práctica, pues la teoría de sistemas lineales de primer orden está muy desarrollada y puede tratarse con métodos algebraicos.

4.2. Teoría general de los sistemas lineales

Definición 4.1. Un **sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden** es un conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, ..., x_n) \\ \vdots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, ..., x_n). \end{cases} \tag{4.1}$$

Este tipo de ecuaciones se presenta con frecuencia en aplicaciones biológicas y físicas describiendo, en muchos casos, sistemas muy complicados ya que la rapidez de cambio de la variable x_i depende, no sólo de t y de x_i, sino también de los valores de las otras variables.

Si cada una de las funciones f_1,..., f_n en (4.1) es una función lineal en las variables dependientes $x_1, ..., x_n$, entonces se dice que el sistema de ecuaciones es **lineal**.

Estudiaremos en este tema la teoría de los sistemas lineales y los métodos para resolverlos, que son extensiones naturales de la teoría correspondiente a las ecuaciones lineales de orden n.

■ **Definición 4.2.** Un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden se dice que está expresado en **forma normal** si se escribe del siguiente modo:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{11}(t)x_1 + ... + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{21}(t)x_1 + ... + a_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= a_{n1}(t)x_1 + ... + a_{nn}(t)x_n + g_n(t). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Si todas las funciones $g_1, ..., g_n$ son cero, se dice que el sistema es **homogéneo**; en otro caso, diremos que es un sistema **no homogéneo**.

En este tema analizaremos los sistemas lineales con coeficientes constantes, es decir, sistemas donde $a_{ij}(t)$ son constantes. Incluso en este caso, los sistemas son difíciles de tratar, en especial si n es muy grande. Por ello, resultará útil repasar los conceptos relacionados con vectores y matrices, de modo que podamos disponer de una manera más concisa de escribir las ecuaciones.

El sistema (4.2) expresado en forma matricial queda:

$$\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) + \vec{g}(t), \tag{4.3}$$

donde

$$\vec{x}'(t) = col(\frac{dx_1}{dt}, ..., \frac{dx_n}{dt}), \quad \vec{x}(t) = col(x_1(t), ..., x_n(t)),$$
$$\vec{g}(t) = col(g_1(t), ..., g_n(t))$$

y $A(t)$ es la matriz:

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

Un problema de valor inicial correspondiente al sistema (4.2) consiste en encontrar una función vectorial diferenciable $\vec{x}(t)$ que satisfaga el sistema en un intervalo I y también satisfaga la condición inicial $\vec{x}(t_0) = \vec{x}^{\,0}$, donde $t_0 \in I$ y $\vec{x}^{\,0} = col(x_1^0, ..., x_n^0)$ es un vector dado. La existencia y unicidad de solución para un problema de valor inicial viene dada por el teorema siguiente:

■ **Teorema 4.1.** Sean $A(t)$ y $\vec{g}(t)$ continuas en un intervalo abierto I que contiene al punto t_0, entonces para cualquier elección del vector inicial

$$\vec{x}^{\,0} = col(x_1^0, ..., x_n^0),$$

existe una única solución del problema de valor inicial

$$\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) + \vec{g}(t), \qquad \vec{x}(t_0) = \vec{x}^{\,0}.$$

A continuación introducimos la notación de operadores. Si definimos el operador $L[\vec{x}] = \vec{x}' - A\vec{x}$, podemos expresar el sistema (4.3) como $L[\vec{x}] = \vec{g}$. Aquí, el operador L transforma funciones vectoriales en funciones vectoriales. Además, L es un operador lineal pues:

$$L[a\vec{x} + b\vec{y}] = a\;L[\vec{x}] + b\;L[\vec{y}].$$

Por ello, si $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n$ son soluciones del sistema homogéneo $\vec{x}' = A\vec{x}$, es decir, si $L[\vec{x}_i] = \vec{0}$, entonces cualquier combinación lineal de estos vectores

$$C_1\vec{x}_1 + ... + C_n\vec{x}_n$$

también es solución.

Veremos, además, que toda solución de $L[\vec{x}] = \vec{0}$ se puede expresar como $C_1\vec{x}_1 + ... + C_n\vec{x}_n$ para valores $C_1, ..., C_n$ adecuados si las soluciones $\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n$ son linealmente independientes. Para ello, generalizamos los conceptos de dependencia e independencia funcional para el caso de funciones vectoriales.

■ **Definición 4.3.** Se dice que m funciones vectoriales $\vec{x}_1(t), ..., \vec{x}_m(t)$ son **linealmente dependientes** en un intervalo I si existen constantes, no todas nulas, tales que:

$$C_1\,\vec{x}_1(t) + ... + C_m\,\vec{x}_m(t) = \vec{0}, \quad \forall t \in I.$$

Si no son linealmente dependientes, se dice que son **linealmente independientes**, es decir, si existe un valor $t_0 \in I$ tal que:

$$C_1\vec{x}_1(t_0) + ... + C_m\vec{x}_m(t_0) = \vec{0},$$

entonces $C_i = 0$, $i = 1, ..., m$.

⬢ **Ejemplo 4.2.** Demostremos que las funciones vectoriales

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix}, \; \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 3e^t \\ 0 \\ 3e^t \end{pmatrix}, \; \vec{x}_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

son linealmente dependientes en $\mathbb{R}$.

Solución. Tomemos una combinación lineal igualada a $\vec{0}$:

$$C_1\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ e^t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 3e^t \\ 0 \\ 3e^t \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde se tiene:
$$\left\{\begin{aligned} C_1e^t + C_2 3e^t + C_3 t = 0 \\ C_3 = 0 \\ C_1 e^t + C_2 3e^t = 0 \end{aligned}\right.$$

La solución de este sistema es $C_3 = 0$, $C_1 + 3C_2 = 0$. Por ejemplo, podemos tomar $C_2 = 1$, $C_1 = -3$, $C_3 = 0$, y tenemos que sí existen constantes, no todas nulas, tales que $C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t) + C_3\vec{x}_3(t) = \vec{0}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Luego son linealmente dependientes en $\mathbb{R}$. ■

Podemos observar que n funciones vectoriales, $\vec{x}_1(t), ..., \vec{x}_n(t)$, son linealmente independientes en un intervalo I si $\det[\vec{x}_1(t), \cdots \vec{x}_n(t)]$ (determinante de los vectores $\vec{x}_1(t), \cdots, \vec{x}_n(t)$) no se anula para algún valor $t \in I$. A este determinante se le denomina wronskiano.

■ **Definición 4.4.** Se llama **wronskiano** de n funciones vectoriales $\vec{x}_1(t), ...,$ $\vec{x}_n(t)$ a la función de valor real:

$$W[\,\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n](t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & \ldots & x_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & \ldots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

La condición de que el wronskiano no se anule para algún valor $t \in I$ es fácil de comprobar ya que, en el caso de que las n funciones sean solución de una ecuación diferencial lineal, o es idénticamente nulo o nunca se anula en el intervalo I.

A continuación estableceremos que, dadas n soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo $\vec{x}' = A\vec{x}$ en el intervalo I, toda solución de dicho sistema será combinación lineal de éstas.

■ **Teorema 4.2.** Sean $\vec{x}_1(t), ..., \vec{x}_n(t)$ n soluciones linealmente independientes del sistema homogéneo
$$\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) \tag{4.4}$$
en el intervalo I, donde $A(t)$ es una función matricial continua en I.

Entonces, toda solución de (4.4) en I se expresa de la forma:
$$\vec{x}(t) = C_1\,\vec{x}_1(t) + ... + C_n\,\vec{x}_n(t) \tag{4.5}$$
donde $C_1, ..., C_n$ son constantes.

La combinación (4.5) constituye la **solución general** del sistema (4.4) y las funciones vectoriales $\vec{x}_1(t), ..., \vec{x}_n(t)$ forman un **conjunto fundamental de soluciones** de (4.4). La matriz $X(t)$, cuyas columnas están constituidas por los vectores de un conjunto fundamental de soluciones, se llama **matriz fundamental**.

Podemos expresar la solución general en forma matricial:
$$\vec{x}(t) = X(t)\,\vec{C},$$
donde $\vec{C} = col(C_1, ..., C_n)$. Puesto que $\det X = W[\,\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n]$ nunca se anula en I, se tiene que X es invertible $\forall t \in I$.

Ejemplo 4.3. Verifiquemos que el conjunto de funciones vectoriales

$$S = \{ \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} \}$$

es un conjunto fundamental de soluciones del sistema:

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$$

en $\mathbb{R}$. Hallemos una matriz fundamental y la solución general.

Solución. Veamos en primer lugar que las tres funciones vectoriales dadas son solución del sistema:

$$A\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} = \vec{x}'(t).$$

$$A\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \vec{x}'(t).$$

$$A\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \vec{x}'(t).$$

Veamos ahora que son linealmente independientes:

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & -e^{-t} \end{vmatrix} = -3 \neq 0;$$

por tanto, sí forman un conjunto fundamental de soluciones. Una matriz fundamental será:

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & -e^{-t} & 0 \\ e^{2t} & 0 & e^{-t} \\ e^{2t} & e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix}$$

y la solución general es:

$$\vec{x}(t) = X(t)\vec{C} = C_1 \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ e^{2t} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Otro concepto que generalizamos al caso de sistemas lineales es el **principio de superposición**, consecuencia directa de la linealidad del operador L:

- Si $\vec{x}_1(t)$ y $\vec{x}_2(t)$ son soluciones de los sistemas lineales no homogéneos $L[\vec{x}] = \vec{g}_1$ y $L[\vec{x}] = \vec{g}_2$, respectivamente, entonces $C_1\vec{x}_1(t) + C_2\vec{x}_2(t)$ es solución del sistema lineal $L[\vec{x}] = C_1\vec{g}_1 + C_2\vec{g}_2$.

Utilizando este resultado, podemos obtener la solución general de un sistema de ecuaciones no homogéneo si conocemos un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo asociado y una solución particular del sistema completo.

■ **Teorema 4.3.** Sea $\vec{x}_p(t)$ una solución particular del sistema no homogéneo:

$$\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) + \vec{g}(t) \tag{4.6}$$

en el intervalo I y sea $\{\vec{x}_1, ..., \vec{x}_n\}$ un conjunto fundamental de soluciones en I del sistema homogéneo correspondiente $\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t)$.

Entonces, toda solución de (4.6) en I se puede expresar de la forma:

$$\vec{x}(t) = C_1\,\vec{x}_1(t) + ... + C_n\,\vec{x}_n(t) + \vec{x}_p(t) \tag{4.7}$$

donde $C_1, ..., C_n$ son constantes.

La combinación dada en (4.7) se llama **solución general** de (4.6) y también puede expresarse como

$$\vec{x}(t) = X(t)\,\vec{C} + \vec{x}_p(t)$$

donde $X(t)$ es una matriz fundamental del sistema homogéneo.

Ejercicios de la sección 4.2

1. Demuestra que las funciones vectoriales

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ e^{2t} \end{pmatrix}, \; \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} \\ e^{2t} \\ -e^{2t} \end{pmatrix}, \; \vec{x}_3(t) = \begin{pmatrix} e^{t} \\ 2e^{t} \\ e^{t} \end{pmatrix}$$

son linealmente independientes en $\mathbb{R}$.

2. Sea el sistema $\vec{x}'(t) = A\,\vec{x}$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comprueba que las funciones vectoriales

$$\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} e^{t} \\ 0 \end{pmatrix}$$

forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema dado. Halla una matriz fundamental y escribe la solución general del sistema.

4.3. Sistemas homogéneos con coeficientes constantes

Veamos a continuación cómo obtener la solución general del sistema homogéneo

$$\vec{x}'(t) = A\,\vec{x}(t) \tag{4.8}$$

donde A es una matriz real constante. Puesto que los elementos de A son funciones constantes y, por tanto, son continuas en $\mathbb{R}$, la solución general que obtengamos estará definida $\forall t \in \mathbb{R}$.

Nuestro propósito es hallar n soluciones vectoriales que sean linealmente independientes. Puesto que la función exponencial verifica que $x' = Cx$, buscaremos soluciones de la forma

$$\vec{x}(t) = e^{rt}\,\vec{u} \tag{4.9}$$

con r constante y $\vec{u}$ vector constante, ambos a determinar.

Para obtener los valores de r y $\vec{u}$, derivamos (4.9) y sustituimos en el sistema homogéneo:

$$re^{rt}\,\vec{u} - A\,e^{rt}\,\vec{u} = \vec{0}.$$

Sacando factor común y teniendo en cuenta que la exponencial es no nula, llegamos a la ecuación:

$$(A - rI)\,\vec{u} = \vec{0}. \tag{4.10}$$

Este cálculo demuestra que $\vec{x}(t) = e^{rt}\,\vec{u}$ es solución del sistema homogéneo si y sólo si r y $\vec{u}$ satisfacen la ecuación (4.10), es decir, si $\vec{u}$ es un vector propio de A asociado al valor propio r. La cuestión es si podemos obtener de este modo n soluciones linealmente independientes. Puesto que el caso trivial $\vec{u} = \vec{0}$ no es útil para encontrar soluciones independientes, se exige que $\vec{u} \neq \vec{0}$. Los valores y vectores propios de A se obtienen a partir de la ecuación característica:

$$|A - rI| = 0.$$

Recordemos que los valores propios son las raíces del polinomio $p(r) = |A - rI|$. Estudiemos los distintos casos que se pueden dar en función de los valores y vectores propios de A y veamos cómo se definen en estos casos las soluciones linealmente independientes.

(I) Valores propios reales

Teorema 4.4. Si la matriz A de dimensión $n \times n$ tiene n vectores propios linealmente independientes $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n$ asociados a los valores propios reales, no necesariamente distintos, $r_1, ..., r_n$, respectivamente, entonces:

$$\{e^{r_1 t}\,\vec{u}_1, ..., \; e^{r_n t}\,\vec{u}_n\}$$

es un conjunto fundamental de soluciones del sistema (4.8) en $\mathbb{R}$ y la solución general es:

$$\vec{x}(t) = C_1\,e^{r_1 t}\,\vec{u}_1 + ... + C_n\,e^{r_n t}\,\vec{u}_n$$

donde $C_1, ..., C_n$ son constantes.

Nota 4.1. Las matrices simétricas de dimensión $n \times n$ tienen n vectores propios linealmente independientes.

■ **Teorema 4.5.** Si $r_1, ..., r_m$ son valores propios distintos de una matriz A y $\vec{u}_i$ es un vector propio asociado a r_i, entonces los vectores $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m$ son linealmente independientes.

Demostración. Sean $r_1 \neq r_2$ y sean $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ dos vectores propios no nulos asociados a r_1 y r_2, respectivamente. Supongamos que $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son linealmente dependientes, entonces

$$\vec{u}_1 = k\,\vec{u}_2.$$

Multiplicamos por la matriz A a la izquierda de ambas partes de la igualdad

$$A\,\vec{u}_1 = k\,A\,\vec{u}_2,$$

dado que $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son vectores propios asociados a los valores propios r_1 y r_2 de A respectivamente, y que hemos considerado que los vectores son linealmente dependientes tenemos que:

$$r_1\,\vec{u}_1 = k\,r_2\,\vec{u}_2 = r_2\,\vec{u}_1.$$

Pasando todos los términos a un lado de la igualdad tenemos,

$$(r_1 - r_2)\,\vec{u}_1,$$

y teniendo en cuenta que $\vec{u}_1$ es un vector propio y no puede ser el vector nulo,

$$r_1 = r_2,$$

llegando a una contradicción. Luego $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son linealmente independientes. ■

■ **Corolario 4.1.** Si una matriz A de dimensión $n \times n$ tiene n valores propios distintos $r_1, ..., r_n$ y $\vec{u}_i$ es un vector propio asociado a r_i, entonces

$$\{e^{r_1 t}\,\vec{u}_1, ..., \; e^{r_n t}\,\vec{u}_n\}$$

es un conjunto fundamental de soluciones del sistema homogéneo $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$.

Ejemplo 4.4. Hallemos la solución general de $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Solución. El enunciado del problema es equivalente a buscar la solución general del sistema:

$$\begin{cases} x_1'(t) = 2x_1(t) - 3x_2(t) \\ \\ x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t). \end{cases}$$

Calculemos en primer lugar los valores propios de la matriz A. Para ello, planteamos la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 2-r & -3 \\ 1 & -2-r \end{vmatrix} = 0$$

y calculamos el determinante,

$$-(4-r^2)+3=0, \text{ es decir, } r^2-1=0.$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos los valores propios:

$$r_1=1, \; r_2=-1.$$

A continuación, calculemos los vectores propios asociados a cada valor:

$$H_1=\{(x,y):\begin{pmatrix}1 & -3\\ 1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\}=\{(x,y):x-3y=0\}$$

$$H_{-1}=\{(x,y):\begin{pmatrix}3 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\}=\{(x,y):x-y=0\}.$$

Un vector propio asociado a $r_1=1$ es $\vec{u}_1=\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}$ y un vector propio asociado a $r_2=-1$ es $\vec{u}_2=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$. Puesto que $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ son vectores propios asociados a dos valores propios distintos, son linealmente independientes y la solución general es:

$$\vec{x}(t)=C_1e^t\begin{pmatrix}3\\ 1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},$$

es decir,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3C_1e^t+C_2e^{-t}\\ x_2(t) &= C_1e^t+C_2e^{-t}. \; \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 4.5. Resolvamos el problema de valor inicial

$$\vec{x}'(t)=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & -4 & 5\end{pmatrix}\vec{x}(t), \; \vec{x}(0)=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Solución. Calculamos los valores propios de la matriz de coeficientes. Planteamos la ecuación:

$$\begin{vmatrix}1-r & 2 & -1\\ 1 & -r & 1\\ 4 & -4 & 5-r\end{vmatrix}=0,$$

desarrollamos el determinante y calculamos las raíces de la ecuación que se obtiene. Así pues, los valores propios asociados a la matriz A son:

$$r_1=1, \quad r_2=2, \quad r_3=3.$$

Calculamos ahora los vectores propios asociados a cada valor propio obtenido:

$$H_1 = \{(x,y,z) : \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$
$$= \{(x,y,z) : 2y - z = 0,\ x - y + z = 0\}.$$
$$H_2 = \{(x,y,z) : \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$
$$= \{(x,y,z) : -x + 2y - z = 0,\ 4x - 4y + 3z = 0\}.$$
$$H_3 = \{(x,y,z) : \begin{pmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$
$$= \{(x,y,z) : -2x + 2y - z = 0,\ x - 3y + z = 0\}.$$

Tomando un vector propio asociado a cada valor propio,

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix},$$

la solución general es:

$$\vec{x}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -e^t & -2e^{2t} & -e^{3t} \\ e^t & e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^t & 4e^{2t} & 4e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}.$$

Consideramos ahora la condición inicial:

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo este sistema, obtenemos $C_1 = 0$, $C_2 = 1$ y $C_3 = -1$. Luego la solución particular buscada es:

$$\vec{x}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Ejemplo 4.6. Hallemos la solución general del sistema de ecuaciones lineales $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Resolviendo $|A - rI| = 0$, obtenemos los valores propios $r_1 = -3$ y $r_2 = 3$ con órdenes de multiplicidad 1 y 2, respectivamente. Como veremos, aunque tengamos un valor propio repetido, sí podemos encontrar 3 vectores propios linealmente independientes, ya que el espacio de vectores propios asociados a $r = 3$ tiene dimensión 2, por tanto podemos tomar dos vectores propios de este espacio linealmente independientes.

Vectores propios asociados a cada valor:

$$\begin{aligned} H_{-3} &= \{(x, y, z) : \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \\ &= \{(x, y, z) : 2x - y + z = 0, \ -x + 2y + z = 0\}. \\ H_3 &= \{(x, y, z) : \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} \\ &= \{(x, y, z) : x + y - z = 0\}. \end{aligned}$$

Tomamos un vector propio asociado a $r_1 = -3$,

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y dos vectores linealmente independientes asociados a $r_2 = 3$,

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, la solución general es:

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

(II) Valores propios complejos

Veamos cómo obtener dos soluciones reales linealmente independientes del sistema

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) \tag{4.11}$$

cuando la matriz A real tiene un par de valores propios complejos conjugados $\alpha \pm i\beta$.

Supongamos que $r_1 = \alpha + i\beta$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$, es un valor propio de A con vector propio correspondiente $\vec{z} = \vec{a} + i\vec{b}$, donde $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores constantes reales. Se observa que su conjugado $\overline{\vec{z}} = \vec{a} - i\vec{b}$ es un vector propio asociado al valor propio $r_2 = \alpha - i\beta$. En efecto, si tomamos el conjugado de:

$$(A - r_1 I)\, \vec{z} = \vec{0},$$

aplicando la propiedad de que el conjugado del producto es el producto de los conjugados y además $\overline{A} = A$ y $\overline{I} = I$ por tener sólo componentes reales, obtenemos:

$$(A - \bar{r}_1 I)\, \overline{\vec{z}} = \vec{0}.$$

Teniendo en cuenta que $\bar{r}_1 = r_2$, entonces:

$$(A - r_2 I)\, \overline{\vec{z}} = \vec{0},$$

por lo tanto, $\overline{\vec{z}}$ es el vector propio asociado a r_2.

Dos soluciones vectoriales complejas de (4.11) linealmente independientes son:

$$\begin{aligned} \vec{w}_1(t) &= e^{r_1 t}\, \vec{z} = e^{(\alpha+i\beta)t}(\vec{a} + i\vec{b}), \\ \vec{w}_2(t) &= e^{r_2 t}\, \overline{\vec{z}} = e^{(\alpha-i\beta)t}(\vec{a} - i\vec{b}). \end{aligned}$$

Utilizamos una de estas dos soluciones y la fórmula de Euler para obtener dos soluciones vectoriales reales. En primer lugar reescribimos $\vec{w}_1(t)$:

$$\begin{aligned} \vec{w}_1(t) &= e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)\right)(\vec{a} + i\vec{b}) \\ &= e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)\, \vec{a} - \sin(\beta t)\, \vec{b}\right) + i e^{\alpha t}\left(\sin(\beta t)\, \vec{a} + \cos(\beta t)\, \vec{b}\right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\vec{w}_1(t) = \vec{x}_1(t) + i\, \vec{x}_2(t)$$

donde $\vec{x}_1(t)$ y $\vec{x}_2(t)$ son las dos funciones vectoriales reales:

$$\begin{aligned} \vec{x}_1(t) &= e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t)\, \vec{a} - \sin(\beta t)\, \vec{b}\right), \\ \vec{x}_2(t) &= e^{\alpha t}\left(\sin(\beta t)\, \vec{a} + \cos(\beta t)\, \vec{b}\right). \end{aligned}$$

Comprobemos que $\vec{x}_1(t)$ y $\vec{x}_2(t)$ son soluciones reales del sistema homogéneo (4.11). Puesto que $\vec{w}_1(t)$ es una solución de (4.11) se tiene:

$$\vec{w}_1'(t) = A\vec{w}_1(t),$$

por tanto:

$$(\vec{x}_1(t) + i\, \vec{x}_2(t))' = A(\vec{x}_1(t) + i\, \vec{x}_2(t)).$$

Derivando:

$$\vec{x}_1'(t) + i\vec{x}_2'(t) = A(\vec{x}_1(t) + i\, \vec{x}_2(t)),$$

es decir:

$$\vec{x}_1'(t) + i\vec{x}_2'(t) = A\vec{x}_1(t) + i\, A\, \vec{x}_2(t).$$

Igualando las partes real e imaginaria, tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{x}_1'(t) &= A\, \vec{x}_1(t) \\ \vec{x}_2'(t) &= A\, \vec{x}_2(t); \end{aligned}$$

por tanto, $\vec{x}_1(t)$ y $\vec{x}_2(t)$ son soluciones reales del sistema homogéneo (4.11) asociadas a los valores propios $\alpha \pm i\beta$. Veamos que $\{\vec{x}_1(t),\ \vec{x}_2(t)\}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}$. Sea $\vec{a} = col(a_1\ \ a_2)$ y $\vec{b} = col(b_1\ \ b_2)$. Entonces:

$$W\left[\vec{x}_1, \vec{x}_2\right](t) = \begin{vmatrix} e^{\alpha t}\cos(\beta t)a_1 - e^{\alpha t}\sin(\beta t)b_1 & e^{\alpha t}\sin(\beta t)a_1 + e^{\alpha t}\cos(\beta t)b_1 \\ e^{\alpha t}\cos(\beta t)a_2 - e^{\alpha t}\sin(\beta t)b_2 & e^{\alpha t}\sin(\beta t)a_2 + e^{\alpha t}\cos(\beta t)b_2 \end{vmatrix}$$

$$= e^{\alpha t}(a_1 b_2 - a_2 b_1) \neq 0,$$

ya que $a_1 b_2 - a_2 b_1 = det(\vec{a}, \vec{b})$ y $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son linealmente independientes.

Resumiendo, si una matriz A tiene valores propios conjugados $\alpha \pm i\beta$ con vectores asociados $\vec{a} \pm i\vec{b}$, entonces dos soluciones vectoriales reales linealmente independientes (4.11) son:

$$\{e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\vec{a} - e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,\vec{b},\ e^{\alpha t}\sin(\beta t)\,\vec{a} + e^{\alpha t}\cos(\beta t)\,\vec{b}\}. \tag{4.12}$$

Ejemplo 4.7. Hallemos la solución general del sistema:

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\dfrac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

Solución. Calculamos en primer lugar los valores propios de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} -\dfrac{1}{2} - r & 1 \\ -1 & -\dfrac{1}{2} - r \end{vmatrix} = 0, \quad \text{de donde:} \quad r^2 + r + \frac{5}{4} = 0, \quad \text{es decir:} \quad r = -\frac{1}{2} \pm i.$$

Para $r_1 = -\frac{1}{2} + i$, calculemos los vectores propios asociados:

$$H_1 = \{(x, y) : \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{(x, y) : -ix + y = 0\}$$
$$= \{(x, y) : y = ix\}.$$

Por tanto, un vector propio asociado a r_1 es

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

luego $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces, dos soluciones reales vienen dadas por (4.12), es decir:

$$\vec{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t}\cos t \\ e^{-\frac{1}{2}t}\sin t \end{pmatrix} \qquad y \qquad \vec{x}_2(t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t}\sin t \\ e^{-\frac{1}{2}t}\cos t \end{pmatrix}$$

y la solución general es:

$$\vec{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t}\cos t \\ e^{-\frac{1}{2}t}\sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t}\sin t \\ e^{-\frac{1}{2}t}\cos t \end{pmatrix}. \blacksquare$$

(III) Valores propios repetidos

Estudiamos finalmente el caso en que A tiene algún valor propio repetido r_i con multiplicidad m_i pero no tiene asociados m_i vectores propios linealmente independientes a dicho valor.

Comenzaremos viendo un ejemplo de un sistema de dos ecuaciones donde la matriz A tiene un valor propio doble r y sólo un vector propio linealmente independiente asociado $\vec{u}_1$.

Ejemplo 4.8. Hallemos la solución general del sistema:

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

Solución. Calculemos los valores propios de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1-r & -1 \\ 1 & 3-r \end{vmatrix} = 0, \quad \text{es decir:} \quad r^2 - 4r + 4 = 0;$$

por tanto, $r = 2$ es un valor propio con multiplicidad 2.

Calculemos los vectores propios asociados:

$$H_2 = \{(x,y) : \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{(x,y) : x + y = 0\}.$$

Por ejemplo, un vector propio asociado será $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Puesto que este espacio tiene dimensión 1, no existe otro vector propio linealmente independiente y tenemos sólo una solución independiente dada por:

$$\vec{x}_1(t) = e^{2t}\,\vec{u}_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Podemos intentar buscar una segunda solución linealmente independiente de la forma:

$$\vec{x}_2(t) = t\,e^{2t}\,\vec{u}_2$$

con $\vec{u}_2$ vector constante a determinar. Para ello, sustituimos en el sistema:

$$2t\,e^{2t}\,\vec{u}_2 + e^{2t}\,\vec{u}_2 - At\,e^{2t}\,\vec{u}_2 = \vec{0}.$$

Igualamos ahora los coeficientes de e^{2t} y $t\,e^{2t}$ a $\vec{0}$. A partir del coeficiente de e^{2t}, se obtiene que $\vec{u}_2 = \vec{0}$. Por tanto, no encontramos ninguna solución del sistema (distinta de cero) de la forma $t\,e^{2t}\,\vec{u}_2$. Puesto que al igualar coeficientes nos aparecen términos en e^{2t} y $t\,e^{2t}$ buscaremos una solución de la forma:

$$\vec{x}_2(t) = t\,e^{2t}\,\vec{u}_3 + e^{2t}\,\vec{u}_2$$

con $\vec{u}_2$ y $\vec{u}_3$ vectores constantes a determinar. Sustituyendo en el sistema:

$$2t\,e^{2t}\,\vec{u}_3 + e^{2t}\,\vec{u}_3 + 2e^{2t}\,\vec{u}_2 - At\,e^{2t}\,\vec{u}_3 - Ae^{2t}\,\vec{u}_2 = \vec{0}.$$

Igualando los coeficientes de e^{2t} y $t\,e^{2t}$, se tiene:

$$\begin{aligned}(A-2I)\vec{u}_3 &= \vec{0}\\ (A-2I)\vec{u}_2 &= \vec{u}_3.\end{aligned}$$

Así, $\vec{u}_3$ es un vector propio de A asociado al valor propio $r=2$ (podemos tomar $\vec{u}_3=\vec{u}_1$), y $\vec{u}_2$ será un vector que verifique la segunda ecuación. Por consiguiente, una segunda solución linealmente independiente es:

$$\vec{x}_2(t) = t\,e^{2t}\,\vec{u}_1 + e^{2t}\,\vec{u}_2$$

donde $\vec{u}_2$ será un vector tal que

$$(A-2I)\vec{u}_2 = \vec{u}_1. \tag{4.13}$$

Como $\det(A-2I)=0$, cabe esperar que la ecuación (4.13) no pueda resolverse. Sin embargo, no es necesariamente cierto, para determinado $\vec{u}_1$ sí puede resolverse,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vemos que el rango de la matriz de coeficientes de este sistema es igual al rango de la matriz ampliada, pues la columna de la derecha es proporcional a las columnas de la matriz, luego el sistema es compatible. Por tanto, buscamos un vector $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tal que $-x-y=1$, luego será de la forma:

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} k \\ -1-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + k\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

y la solución quedaría:

$$\vec{x}_2(t) = t\,e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + ke^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

El último sumando es proporcional a $\vec{x}_1(t)$, luego ya estará incluido en la solución general, podemos por tanto, tomar $k=0$ al considerar el vector $\vec{u}_3$. De este modo, la solución general será:

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1(t)+C_2\vec{x}_2(t) = C_1e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}+C_2\left(t\,e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

■

Estudiemos la obtención de las soluciones para el caso de valores propios con multiplicidad 2 ó 3. Si existe un valor propio r con orden de multiplicidad mayor que tres, la situación se va complicando y requiere un tratamiento basado en la exponencial de una matriz y el conocimiento de la teoría de matrices.

Si r es valor propio de A con orden de multiplicidad dos y sólo tiene un vector propio $\vec{u}_1$ linealmente independiente, entonces tenemos dos soluciones linealmente independientes de la forma:

$$\vec{x}_1(t) = e^{rt}\,\vec{u}_1$$

$$\vec{x}_2(t) = t\,e^{rt}\,\vec{u}_1 + e^{rt}\,\vec{u}_2$$

donde $\vec{u}_2$ un vector que satisface la condición:

$$(A - rI)\,\vec{u}_2 = \vec{u}_1. \tag{4.14}$$

A un vector que verifica esta condición se le llama vector propio generalizado asociado al valor propio r. Esta condición implica que:

$$(A - rI)^2\vec{u}_2 = \vec{0}.$$

■ **Definición 4.5.** Un vector $\vec{u}$ es un **vector propio generalizado** de una matriz A, asociado a un valor propio r, si existe un k entero positivo tal que:

$$(A - rI)^k\,\vec{u} = \vec{0}.$$

Si r es un valor propio de A con orden de multiplicidad tres, tenemos varias posibilidades:

1) Si r tiene asociados tres vectores propios $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ linealmente independientes, estamos en el caso estudiado en (I).

2) Si r tiene un sólo vector propio linealmente independiente $\vec{u}_1$, las tres soluciones linealmente independientes asociadas vienen dadas por:

$$\vec{x}_1(t) = e^{rt}\,\vec{u}_1$$

$$\vec{x}_2(t) = t\,e^{rt}\,\vec{u}_1 + e^{rt}\,\vec{u}_2,\ \text{ con }\ \vec{u}_2\ \text{ tal que }\ (A - rI)\vec{u}_2 = \vec{u}_1$$

$$\vec{x}_3(t) = \tfrac{t^2}{2!}\,e^{rt}\,\vec{u}_1 + t\,e^{rt}\,\vec{u}_2 + e^{rt}\,\vec{u}_3,\ \text{ con }\ \vec{u}_3\ \text{ tal que }\ (A - rI)\vec{u}_3 = \vec{u}_2.$$

Esta tercera solución $\vec{x}_3(t)$ es linealmente independiente de $\vec{x}_1(t)$ y $\vec{x}_2(t)$ y se obtiene con un razonamiento análogo al dado en el ejemplo para obtener $\vec{x}_2(t)$.

3) Si un valor propio r con multiplicidad 3 sólo tiene asociados dos vectores propios linealmente independientes $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, tendremos dos soluciones dadas por:

$$\vec{x}_1(t) = e^{rt}\,\vec{u}_1$$

$$\vec{x}_2(t) = e^{rt}\,\vec{u}_2.$$

Busquemos una tercera solución que sea linealmente independiente de estas dos. Supongamos que es de la forma:

$$\vec{x}_3(t) = e^{rt}\,\vec{u}_3 + t\,e^{rt}\,\vec{u}_4$$

y derivamos:

$$\vec{x}_3'(t) = re^{rt}\,\vec{u}_3 + e^{rt}\,\vec{u}_4 + rt\,e^{rt}\,\vec{u}_4.$$

A continuación, sustituimos en el sistema:

$$re^{rt}\,\vec{u}_3 + e^{rt}\,\vec{u}_4 + rt\,e^{rt}\,\vec{u}_4 - Ae^{rt}\,\vec{u}_3 - At\,e^{rt}\,\vec{u}_4 = \vec{0}$$

e igualando términos deducimos que:

$$\begin{aligned} (A - rI)\,\vec{u}_4 &= \vec{0}, \\ (A - rI)\,\vec{u}_3 &= \vec{u}_4, \end{aligned} \tag{4.15}$$

es decir, $\vec{u}_4$ es un vector propio de A asociado a r y $\vec{u}_3$ es un vector propio generalizado. Para que se puedan dar estas dos condiciones, tomaremos una tercera solución linealmente independiente que será de la forma:

$$\vec{x}_3(t) = t\ e^{rt}\ \vec{u}_k + e^{rt}\ \vec{u}_3$$

con $\vec{u}_3$ vector propio generalizado verificando $(A - rI)\vec{u}_3 = \vec{u}_k$, donde $\vec{u}_k$ es un vector propio combinación lineal de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$, que se elegirá de modo que la ecuación (4.15) pueda resolverse para $\vec{u}_3$.

Ejemplo 4.9. Hallemos tres soluciones linealmente independientes del sistema:

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

Solución. Resolviendo $|A - rI| = 0$, obtenemos el valor propio $r = 2$ con orden de multiplicidad 3. Calculemos los vectores propios asociados a este valor:

$$H_2 = \{(x, y, z) : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \{(x, y, z) : y = 0,\ z = 0\}.$$

Este espacio vectorial tiene dimensión 1, luego sólo podemos obtener un vector propio linealmente independiente, por ejemplo el vector $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ y una primera solución vendrá dada por:

$$\vec{x}_1(t) = e^{2t}\,\vec{u}_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La segunda solución será de la forma $\vec{x}_2(t) = t\,e^{2t}\,\vec{u}_1 + e^{2t}\,\vec{u}_2$, con $\vec{u}_2$ tal que $(A - 2I)\vec{u}_2 = \vec{u}_1$, es decir, $\vec{u}_2$ será un vector cuyas componentes verifiquen:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

el sistema asociado es:

$$\begin{cases} y + 6z = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

y resolviendo el sistema:

$$y = 1 \;\; z = 0.$$

Así, $\vec{u}_2$ será de la forma:

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En $\vec{u}_2$ eliminamos el segundo sumando ya que es proporcional a $\vec{u}_1$, así tomamos

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La tercera solución será de la forma $\vec{x}_3(t) = \frac{t^2}{2!}\, e^{rt}\, \vec{u}_1 + t\, e^{rt}\, \vec{u}_2 + e^{rt}\, \vec{u}_3$, con $\vec{u}_3$ tal que $(A - 2I)\vec{u}_3 = \vec{u}_2$, es decir, sus componentes verificarán:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

planteamos el sistemas asociado:

$$\begin{cases} y + 6z = 0 \\ 5z = 1 \end{cases}$$

y resolviendo obtenemos:

$$y = -6/5, \;\; z = 1/5.$$

Por tanto, $\vec{u}_3$ será de la forma:

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} x \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De nuevo, eliminamos el término proporcional a $\vec{u}_1$ tomando $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}$.

Así pues, tres soluciones linealmente independientes son:

$$\vec{x}_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}_2(t) = t\, e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}_3(t) = \frac{t^2}{2!}\, e^{rt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\, e^{rt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{rt} \begin{pmatrix} 0 \\ -6/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}. \;\blacksquare$$

⬢ **Ejemplo 4.10.** Hallemos una matriz fundamental del sistema:

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$$

Solución. Resolviendo $|A - rI| = 0$, obtenemos el valor propio $r = 1$ con orden de multiplicidad 3. El espacio de vectores propios asociados a este valor será:

$$H_1 = \{(x, y, z) : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$
$$= \{(x, y, z) : x + y + z = 0\}.$$

Este espacio vectorial tiene dimensión 2, luego podemos obtener dos vectores propios linealmente independientes. Puesto que los vectores de este espacio son de la forma:

$$\begin{pmatrix} -y - z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

podemos tomar, por ejemplo, los vectores $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, que son linealmente independientes. Así, dos soluciones linealmente independientes vendrán dadas por:

$$\vec{x}_1(t) = e^t \, \vec{u}_1 = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$
$$\vec{x}_2(t) = e^t \, \vec{u}_2 = e^t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La tercera solución será de la forma $\vec{x}_3(t) = t\, e^t \, \vec{u}_k + e^t \, \vec{u}_3$, con $\vec{u}_k = k_1 \vec{u}_1 + k_2 \vec{u}_2$ y $(A - I)\vec{u}_3 = \vec{u}_k$. Por tanto, buscamos dos vectores que nos permitan resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = k_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1 - k_2 \\ k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}.$$

Para que el sistema sea compatible, haremos que la columna de los términos independientes sea combinación lineal de las columnas de la matriz de coeficientes. En este caso, podemos tomar $k_1 = 1$ y $k_2 = -2$, entonces:

$$\vec{u}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

y $\vec{u}_3$ será un vector cuyas componentes verifiquen $x + y + z = 1$, es decir, será un vector de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1-y-z \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eliminando los sumandos proporcionales a $\vec{u}_1$ y a $\vec{u}_2$ tomamos

$$\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

La tercera solución es:

$$\vec{x}_3(t) = t\,e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y la matriz fundamental viene dada por:

$$X(t) = \begin{pmatrix} -e^t & -e^t & t\,e^t + e^t \\ e^t & 0 & t\,e^t \\ 0 & e^t & -2t\,e^t \end{pmatrix}. \blacksquare$$

4.3.1. La función exponencial matricial

El estudio de la función exponencial matricial nos lleva a un método alternativo para la obtención de una matriz fundamental de un sistema. Dada una matriz constante A de dimensión $n \times n$, definimos la matriz e^{At} imitando el desarrollo de Taylor de e^{at}, es decir,

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + ... + A^n\frac{t^n}{n!} + ... \tag{4.16}$$

Veamos algunas de sus propiedades que utilizaremos más adelante:

1. $e^{A0} = e^O = I$, siendo O la matriz nula de dimensión $n \times n$.
2. $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$.
3. $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$, por tanto se tiene que e^{At} es una matriz regular.
4. $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ si $AB = BA$.
5. $e^{rIt} = e^{rt}I$.

Si diferenciamos en (4.16), se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{At}) &= \frac{d}{dt}(I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + ... + A^n\frac{t^n}{n!} + ...) \\ &= A + A^2t + A^3\frac{t^2}{2!} + ... + A^n\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + ... \\ &= A(I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + ... + A^n\frac{t^n}{n!} + ...) \\ &= Ae^{At}, \end{aligned}$$

es decir, e^{At} es solución de la ecuación diferencial matricial $X' = AX$ y dado que e^{At} es una matriz regular, resulta que las columnas de e^{At} son soluciones linealmente independientes del sistema $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$.

■ **Teorema 4.6.** Si A es una matriz constante de dimensión $n \times n$, entonces las columnas de la matriz exponencial e^{At} forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema:

$$\vec{x}'(t) = A\,\vec{x}(t). \tag{4.17}$$

En consecuencia, e^{At} es una matriz fundamental del sistema (4.17) y la solución general es $\vec{x}(t) = e^{At}\vec{C}$. Así, el problema de valor inicial:

$$\vec{x}'(t) = A\,\vec{x}(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}^{\,0}$$

tiene una única solución dada por:

$$\vec{x}(t) = e^{At}\vec{x}^{\,0}.$$

Nos centraremos a continuación en el cálculo de la matriz e^{At}.

Si la matriz A es una matriz diagonal, el cálculo de e^{At} resulta sencillo.

Ejemplo 4.11. Calculemos e^{At}, siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Solución. Puesto que A es diagonal se tiene que $A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$, por tanto:

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n \frac{t^n}{n!} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{t^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \frac{t^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Así, si A es la matriz diagonal $A = diag(d_1, d_2, ..., d_n)$, entonces e^{At} es la matriz diagonal $e^{At} = diag(e^{d_1 t}, e^{d_2 t}, ..., e^{d_n t})$.

Si A no es diagonal, el cálculo de e^{At} es más laborioso.

Veamos cómo determinar e^{At} para una clase especial de matrices. Si una matriz no nula B es una matriz nilpotente, es decir, $B^k = 0$ para algún entero k positivo, entonces la serie de e^{Bt} sólo tiene un número finito de términos y en este caso:

$$e^{Bt} = I + Bt + B^2\frac{t^2}{2!} + ... + B^{k-1}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Aplicando las propiedades vistas anteriormente, podemos descomponer e^{At} del siguiente modo:

$$e^{At} = e^{rIt}e^{(A-rI)t} = e^{rt}Ie^{(A-rI)t} = e^{rt}e^{(A-rI)t}.$$

Si elegimos r de modo que la matriz $A-rI$ sea nilpotente, obtendremos una representación finita de e^{At}. Esto ocurre si el polinomio característico de A es de la forma $p(r) = (r-r_1)^n$, es decir, si A tiene un valor propio de multiplicidad

n. En este caso, puesto que por el Teorema de Cayley-Hamilton toda matriz A satisface su polinomio característico, es decir, $p(A) = 0$, tendremos que $(A - r_1 I)^n = 0$. Entonces:

$$e^{At} = e^{r_1 t}\left(I + (A - r_1 I)t + ... + (A - r_1 I)^{n-1}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right).$$

Ejemplo 4.12. Hallemos e^{At}, siendo A la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Calculemos los valores propios de A:

$|A - rI| = -(r-1)^3 = 0 \to r = 1$ es valor propio con multiplicidad 3.

Entonces, $(A - rI)^3 = 0 \to (A - I)^3 = 0 \to A - I$ es nilpotente y se tiene:

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^t e^{(A-I)t} = e^t\left(I + (A-I)t + (A-I)^2\frac{t^2}{2!}\right) \\ &= e^t\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2!}\right) \\ &= \begin{pmatrix} e^t + te^t & te^t & te^t \\ te^t & e^t + te^t & te^t \\ -2te^t & -2te^t & e^t - 2te^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Y esta matriz obtenida es una matriz fundamental del sistema $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$. ■

En general, no se satisface la nilpotencia pero podremos calcular e^{At} mediante la siguiente propiedad que relaciona dos matrices fundamentales de un sistema.

Lema 4.1. Sean $X(t)$ e $Y(t)$ dos matrices fundamentales de un sistema $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$. Entonces, existe una matriz constante C tal que:

$$X(t) = Y(t)C.$$

Por tanto, conocida una matriz fundamental $X(t)$ de $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$, puesto que e^{At} es también matriz fundamental, se tendrá que:

$$e^{At} = X(t)C.$$

Haciendo $t = 0$, se tiene:

$$I = X(0)C \to C = X^{-1}(0),$$

y llegamos a:

$$e^{At} = X(t)X^{-1}(0).$$

Veamos cómo hallar una matriz fundamental basándonos en las propiedades estudiadas. Por el lema anterior, las columnas de una matriz fundamental serán de la forma $e^{At}\vec{u}$, con $\vec{u}$ vector constante, es decir, las columnas serán de la forma:

$$
\begin{aligned}
e^{At}\vec{u} &= e^{rt}e^{(A-r)t}\vec{u} = e^{rt}(I + (A-rI)t + ... + (A-rI)^k\frac{t^k}{k!} + ...)\vec{u} \\
&= e^{rt}(\vec{u} + t(A-rI)\vec{u} + ... + \frac{t^k}{k!}(A-rI)^k\vec{u} + ...).
\end{aligned}
$$

Intentaremos encontrar n vectores $\vec{u}$ de modo que el cálculo de cada una de estas columnas resulte manejable, es decir, que los desarrollos sean finitos.

Si $\vec{u}$ es un vector propio de A asociado al valor propio r, entonces

$$(A-rI)\vec{u} = \vec{0} \quad \text{y} \quad (A-rI)^k\vec{u} = \vec{0}$$

para $k > 1$, luego el desarrollo anterior se reduce a $e^{rt}\vec{u}$, resultado que ya conocíamos, y la columna obtenida es la solución correspondiente a dicho vector propio.

En general, se tendrá un número finito de sumandos si $(A-rI)^k\vec{u} = 0$ para algún k entero positivo. Como vimos, los vectores que satisfacen esta propiedad son los vectores propios generalizados.

Así, si el polinomio característico de la matriz A es:

$$p(r) = (r-r_1)^{m_1} \dots (r-r_k)^{m_k},$$

se verifica que para cada valor propio r_i de A con multiplicidad m_i, existen m_i vectores propios generalizados linealmente independientes, con $m_1 + ... + m_k = n$. Por tanto, a partir de estos n vectores propios generalizados calcularemos las n soluciones linealmente independientes de la forma $e^{At}\vec{u}$ para cada $\vec{u}$.

En resumen, para hallar un conjunto fundamental de soluciones del sistema $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ seguiremos los siguientes pasos:

1. Calcularemos el polinomio característico $p(r) = |A - rI|$ y hallaremos los valores propios:

$$
\begin{aligned}
&r_1 \text{ con multiplicidad } m_1 \\
&\vdots \\
&r_k \text{ con multiplicidad } m_k.
\end{aligned}
$$

2. Para cada r_i buscaremos m_i vectores propios generalizados linealmente independientes.

3. Construiremos n soluciones linealmente independientes, es decir, n columnas de la matriz fundamental, de la forma:

$$e^{At}\vec{u} = e^{r_it}(\vec{u} + t(A-r_iI)\vec{u} + \frac{t^2}{2!}(A-r_iI)^2\vec{u} + ...).$$

⬢ **Ejemplo 4.13.** Hallemos la matriz fundamental e^{At} del sistema $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. El polinomio característico de A es $p(r) = (r-1)^2(r-3)$, luego se tiene un valor propio $r_1 = 1$ con multiplicidad 2 y un valor propio $r_2 = 3$ con multiplicidad 1.

Para $r_1 = 1$,

$$H_1 = \{(x,y,z) : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \{(x,y,z) : \ x = 0, \ y = 0\}.$$

Un vector propio asociado a $r_1 = 1$ es $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Así, la primera columna de la matriz fundamental es $\vec{x}_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Puesto que para $r_1 = 1$ valor propio doble sólo se tiene un vector propio linealmente independiente, buscaremos ahora un vector propio generalizado, es decir, buscaremos un vector que verifique:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o equivalentemente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es, por tanto, un vector cuyas componentes verifiquen $x + 2y = 0$ e $y = 1$. Es decir, será un vector de la forma:

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Eliminando los sumandos proporcionales a $\vec{u}_1$, tomamos $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La segunda solución o segunda columna de la matriz fundamental es:

$$\begin{aligned} \vec{x}_2(t) &= e^{At}\vec{u}_2 = e^t e^{(A-I)t}\vec{u}_2 = e^t(\vec{u}_2 + t(A-I)\vec{u}_2) \\ &= e^t\vec{u}_2 + te^t\vec{u}_1 = e^t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + te^t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^t \\ e^t \\ te^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para $r_2 = 3$,

$$H_3 = \{(x,y,z) : \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \{(x,y,z) : \ x = 0, \ y{-}2z = 0\}.$$

Un vector propio asociado a $r_2 = 3$ es $\vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ y la tercera columna de la matriz fundamental será $\vec{x}_3(t) = e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$.

Luego una matriz fundamental es:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 0 & -2e^t & 0 \\ 0 & e^t & 2e^{3t} \\ e^t & te^t & e^{3t} \end{pmatrix}$$

y la matriz fundamental e^{At} es:

$$e^{At} = X(t)X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} & e^{3t} & 0 \\ -\frac{1}{4}e^t - \frac{1}{2}te^t + \frac{1}{4}e^{3t} & -\frac{1}{2}e^t + \frac{1}{2}e^{3t} & e^t \end{pmatrix}. \ \blacksquare$$

Ejercicios de la sección 4.3

1. Halla la solución general de los siguientes sistemas de ecuaciones:

   (a) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$,

   (b) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$,

   (c) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$.

   (Solución: (a) $\vec{x}(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

   (b) $\vec{x}(t) = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} + C_2 e^{-4t} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $\vec{x}(t) = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} + C_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$).

2. Halla la solución general de los siguientes sistemas:

   (a) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}(t)$.

(b) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ -8 & 0 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$

(Solución: (a) $\vec{x}(t) = C_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2\cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2\sin t \\ -\sin t + \cos t \end{pmatrix}.$

(b) $\vec{x}(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{pmatrix} 4\cos(4t) \\ -\cos(4t) + 3\sin(4t) \\ -8\sin(4t) \end{pmatrix}$

$+ C_3 e^{-2t} \begin{pmatrix} 4\sin(4t) \\ -\sin(4t) + 3\cos(4t) \\ 8\cos(4t) \end{pmatrix}$).

3. Resuelve los siguientes sistemas:

   (a) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$

   (b) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$

(Solución: (a) $\vec{x}(t) = C_1 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \right).$

(b) $\vec{x}(t) = C_1 e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{t} \left(t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$).

4. Halla una matriz fundamental de los siguientes sistemas:

   (a) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$

   (b) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$

   (c) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$

   (d) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}(t).$

(Solución: (a) $X(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & t\,e^{3t} \\ 0 & -\frac{1}{5}e^{3t} \\ 0 & \frac{1}{5}e^{3t} \end{pmatrix}.$

(b) $X(t) = \begin{pmatrix} e^t & t\,e^t & t\,e^t \\ e^t & t\,e^t & (t+\frac{1}{4})e^t \\ 0 & e^t & (\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2})\,e^t \end{pmatrix}.$

(c) $X(t) = \begin{pmatrix} e^t & 0 & t\,e^t \\ 0 & 2e^t & 2t\,e^t \\ 2e^t & -3e^t & (-t-\frac{1}{2})\,e^t \end{pmatrix}.$

(d) $X(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} & -t\,e^{2t} & -\sin t & \cos t \\ 0 & -e^{2t} & -\frac{1}{2}(\cos t + \sin t) & -\frac{1}{2}(\sin t + \cos t) \\ e^{2t} & t\,e^{2t} & \frac{1}{2}(\cos t + \sin t) & \frac{1}{2}(\sin t - \cos t) \\ 0 & e^{2t} & \cos t & \sin t \end{pmatrix}).$

4.4. Sistemas no homogéneos

Ya sabemos que la solución general de un sistema no homogéneo

$$\vec{x}'(t) = A(t)\vec{x}(t) + \vec{g}(t)$$

es de la forma:

$$\vec{x}(t) = c_1\vec{x}_1 + \dots + c_n\vec{x}_n + \vec{x}_p(t).$$

Hemos estudiado cómo hallar un conjunto fundamental de soluciones para el sistema homogéneo asociado para el caso en que A sea una matriz constante. Veamos ahora cómo obtener una solución particular del sistema completo.

Tanto el método de los coeficientes indeterminados como el método de variación de los parámetros, son una extensión de los métodos estudiados para el caso de ecuaciones lineales de orden n.

4.4.1. El método de los coeficientes indeterminados

Este método se puede aplicar si la matriz A es constante, es decir, no depende de t, y las componente de $\vec{g}(t)$ son funciones polinómicas, exponenciales, senos, cosenos o bien sumas o productos de éstas.

(I) Si el término no homogéneo es un polinomio de grado m con coeficientes vectoriales:

$$\vec{g}(t) = \vec{P}_m(t) = \vec{a}_m t^m + \cdots + \vec{a}_1 t + \vec{a}_0,$$

tomaremos la solución particular de la forma:

$$\vec{x}_p(t) = t^h\vec{Q}_m(t) = t^h(\vec{A}_m t^m + \cdots + \vec{A}_1 t + \vec{A}_0),$$

teniendo en cuenta que:

- Se añade el término t^h si $r = 0$ es raíz de la ecuación característica, con orden de multiplicidad h.
- $\vec{A}_i$ son coeficientes a determinar.

(II) Si el término no homogéneo es un producto de exponencial y polinomio:

$$\vec{g}(t) = e^{\alpha t}\,\vec{P}_m(t)$$

tomaremos la solución particular de la forma:

$$\vec{x}_p(t) = e^{\alpha t}\,\vec{Q}_m(t),$$

teniendo en cuenta que:

- $\vec{Q}_m$ es un polinomio de grado m con coeficientes a determinar.
- La ecuación característica no tiene como raíz $r = \alpha$.

Sin embargo, tomaremos como propuesta de solución particular

$$\vec{x}_p(t) = e^{\alpha t}(t^h\,\vec{Q}_m(t) + \vec{R}_{h-1}(t)),$$

teniendo en cuenta que:

- Se añade el término t^h en el caso en que $r = \alpha$ sea raíz de la ecuación característica, con orden de multiplicidad h.
- $\vec{Q}_m$ y $\vec{R}_{h-1}$ son polinomios de grado m y $h-1$, respectivamente, con coeficientes a determinar.

(III) Si el término no homogéneo es un producto de exponencial y una combinación de coseno y seno por polinomios:

$$\vec{g}(t) = e^{\alpha t}(\vec{P}_m(t)\cos\beta t + \vec{R}_n(t)\sin\beta t),$$

tomaremos la solución particular de la forma:

$$\vec{x}_p(t) = e^{\alpha t}\,t^h(\vec{Q}_N(t)\cos\beta t + \vec{S}_N(t)\sin\beta t)),$$

- Se añade el término t^h si $r = \alpha + i\beta$ es raíz de la ecuación característica, con orden de multiplicidad h.
- $N = máx(m, n)$ y siendo $\vec{Q}_N(t)$ y $\vec{S}_N(t)$ son polinomios de grado N, con coeficientes a determinar.

(IV) Si $\vec{g}(t)$ consiste en sumas finitas de los casos **(I)**,**(II)** y **(III)**, por el principio de superposición, $\vec{x}_p(t)$ será combinación de las soluciones particulares correspondientes.

■ **Nota 4.2.** Para determinar los coeficientes vectoriales $\vec{A}_i$ y del resto de polinomios que aparecen en los casos descritos se deriva y se sustituye la propuesta de solución particular $\vec{x}_p$ en el sistema de ecuaciones diferenciales.

Ejemplo 4.14. Hallemos la solución general del sistema $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)+\vec{g}(t)$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \; y \; \vec{g}(t) = \begin{pmatrix} -9t \\ 0 \\ -18t \end{pmatrix}.$$

Solución. Los valores propios de A son $r_1 = 3$ con orden de multiplicidad 2 y $r_2 = -3$. Calculando los vectores propios asociados, obtenemos la solución del sistema homogéneo:

$$\vec{x}_h(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Busquemos ahora una solución particular. Como $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} t$ es un polinomio de grado 1, correspondiente al caso (I) de la tabla, buscamos una solución de la forma:

$$\vec{x}_p(t) = t^h(\vec{a}t + \vec{b}).$$

Como 0 no es valor propio, $h = 0$, la solución particular será:

$$\vec{x}_p(t) = \vec{a}t + \vec{b},$$

con $\vec{a}$ y $\vec{b}$ a determinar. Para ello, sustituimos $\vec{x}_p(t)$ en el sistema:

$$\vec{x}_p'(t) = A\,\vec{x}_p(t) + \vec{g}(t),$$

de donde:

$$\vec{a} = A(\vec{a}t + \vec{b}) + \vec{g}(t) \longrightarrow t(A\,\vec{a} + \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}) + (A\,\vec{b} - \vec{a}) = \vec{0}.$$

Igualando a $\vec{0}$ los coeficientes de este polinomio vectorial:

$$A\,\vec{a} + \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix} = \vec{0} \longrightarrow A\,\vec{b} - \vec{a} = \vec{0},$$

obtenemos las ecuaciones matriciales:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}.$$

Resolviendo el primer sistema, se tiene $a_1 = 5$, $a_2 = 2$ y $a_3 = 4$. Sustituyendo estos valores en el segundo sistema y resolviendo se tiene que $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ y $b_3 = 2$.

Por tanto, la solución particular buscada es:

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t+1 \\ 2t \\ 4t+2 \end{pmatrix}$$

y la solución general es:

$$\vec{x}(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5t+1 \\ 2t \\ 4t+2 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

4.4.2. El método de variación de los parámetros

Éste es un método más general ya que los coeficientes del sistema pueden ser funciones continuas arbitrarias de t, así como las componentes de $\vec{g}(t)$. Para aplicar este método debemos partir de una solución general conocida del sistema homogéneo asociado.

Conocida $X(t)$ una matriz fundamental del sistema homogéneo $\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t)$, la solución general de este sistema homogéneo viene dada por $X(t)\vec{C}$, siendo $\vec{C}$ un vector constante. Entonces, para el sistema completo

$$\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) + \vec{g}(t) \tag{4.18}$$

buscaremos una solución particular de la forma:

$$\vec{x}_p(t) = X(t)\,\vec{v}(t),$$

es decir, cambiamos el vector constante $\vec{C}$ por una función vectorial $\vec{v}(t) = col(v_1(t), ..., v_n(t))$ a determinar.

Para calcular $\vec{v}(t)$, derivamos $\vec{x}_p(t)$:

$$\vec{x}_p'(t) = X(t)\,\vec{v}'(t) + X'(t)\,\vec{v}(t)$$

y sustituimos en la ecuación (4.18):

$$X(t)\,\vec{v}'(t) + X'(t)\,\vec{v}(t) = A(t)\,X(t)\,\vec{v}(t) + \vec{g}(t).$$

Puesto que $X(t)$ satisface la ecuación matricial $X'(t) = A(t)X(t)$, se tiene que:

$$X(t)\,\vec{v}'(t) = \vec{g}(t),$$

entonces:

$$\vec{v}'(t) = X^{-1}(t)\,\vec{g}(t) \tag{4.19}$$

e integrando se obtiene:

$$\vec{v}(t) = \int X^{-1}(t)\,\vec{g}(t)\,dt.$$

La solución general del sistema completo es:

$$\vec{x}(t) = X(t)\,\vec{C} + X(t)\int X^{-1}(s)\,\vec{g}(s)\,ds. \tag{4.20}$$

Para un problema de valor inicial de la forma:

$$\vec{x}'(t) = A(t)\,\vec{x}(t) + \vec{g}(t), \qquad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0,$$

tendremos que despejar $\vec{C}$ de la solución en t_0:

$$\vec{x}_0 = X(t_0)\,\vec{C} + X(t_0)\left[\int X^{-1}(s)\,\vec{g}(s)\,ds\right]_{t_0} = X(t_0)\,\vec{C} + X(t_0)\,I(t_0),$$

$$\text{de donde: } \vec{C} = X^{-1}(t_0)\,(\vec{x}_0 - X(t_0)\,I(t_0)) = X^{-1}(t_0)\,\vec{x}_0 - I(t_0)$$

y al sustituir en (4.20) obtenemos la solución:

$$\begin{aligned}\vec{x}(t) &= X(t)\,X^{-1}(t_0)\,\vec{x}_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,\vec{g}(s)\,ds \\ &= X(t)\left(X^{-1}(t_0)\,\vec{x}_0 + \int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)\,\vec{g}(s)\,ds\right).\end{aligned} \tag{4.21}$$

Ejemplo 4.15. Hallemos una solución particular del sistema de ecuaciones:

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\vec{x}(t) + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solución. Los valores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ son $r_1 = 2$ y $r_2 = 1$ con vectores propios asociados $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, respectivamente. Por tanto, la solución general del sistema homogéneo asociado es:

$$\vec{x}_h(t) = C_1 e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^t \\ 2e^{2t} & e^t \end{pmatrix}\vec{C} = X(t)\,\vec{C}.$$

Buscamos una solución particular de la forma:

$$\vec{x}_p(t) = X(t)\,\vec{v}(t)$$

con $\vec{v}(t)$ función vectorial a determinar. Para ello, podemos derivar $\vec{x}_p(t)$ y sustituir en el sistema, o bien podemos determinar directamente $\vec{v}(t)$ a partir de la condición obtenida en (4.19):

$$\vec{v}'(t) = X^{-1}(t)\,\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t} & e^{-2t} \\ 2e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Integrando:

$$\vec{v}(t) = \int \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ 2 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2t \end{pmatrix}$$

y la solución particular obtenida es:

$$\vec{x}_p(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^t \\ 2e^{2t} & e^t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t + 2te^t \\ 2e^t + 2te^t \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Ejemplo 4.16. Resolvamos el problema de valor inicial:

$$\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Solución. Como ya vimos en el Ejemplo 4.4, una matriz fundamental del sistema homogéneo asociado es:

$$X(t) = \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix}$$

y la solución general de la parte homogénea es $\vec{x}_h(t) = X(t)\,\vec{C}$.

Podemos resolver el problema planteando una solución particular de la forma $\vec{x}_p(t) = X(t)\,\vec{v}(t)$, derivando y sustituyendo en el sistema para determinar $\vec{v}(t)$ y posteriormente sustituir las condiciones iniciales para determinar las constantes de $\vec{C}$, o bien podemos sustituir directamente en la fórmula (4.21) obtenida anteriormente. Para sustituir directamente en la fórmula, calculemos $X^{-1}(t)$:

$$X^{-1}(t) = \frac{1}{\det X(t)} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^t \\ -e^{-t} & 3e^t \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^t & 3e^t \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (4.21) tenemos:

$$\begin{aligned}
\vec{x}(t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \int_{t_0}^{t} \begin{pmatrix} e^s - e^{-s} \\ -3e^{3s} + 3e^s \end{pmatrix} ds \right] \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} \\ \frac{-e^{3t}}{3} + 3e^t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 + e^t + e^{-t} \\ -\frac{5}{3} - \frac{e^{3t}}{3} + 3e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{9}{2}e^t + \frac{4}{3}e^{2t} - \frac{5}{6}e^{-t} + 3 \\ \\ -\frac{3}{2}e^t + \frac{1}{3}e^{2t} - \frac{5}{6}e^{-t} + 2 \end{pmatrix}. \ \blacksquare
\end{aligned}$$

Ejercicios de la sección 4.4

1. Plantea la solución particular del sistema $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) + \vec{g}(t)$ para los siguientes casos:

   (a) $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \\ \sin t \end{pmatrix}.$

   (b) $\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} t \\ e^{3t} \\ t^2 \end{pmatrix}$

   siendo A la matriz del Ejemplo 4.16.

   (Solución: (a) $\vec{x}_p(t) = \vec{a}t + \vec{b} + \vec{c}\sin t + \vec{d}\cos t$.

   (b) $\vec{x}_p(t) = \vec{a}t^2 + \vec{b}t + \vec{c} + e^{3t}(\vec{d}t + \vec{e} + \vec{f}t^2)$).

2. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales:

   (a) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} 1/t \\ 4 + 2/t \end{pmatrix}$.

   (b) $\vec{x}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \vec{x}(t) + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t, \quad \vec{x}(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (Solución: (a) $\vec{x}(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{8}{5}t + \ln|t| - \frac{8}{25} \\ \frac{16}{5}t + 2\ln|t| + \frac{4}{25} \end{pmatrix}$.

   (b) $\vec{x}(t) = -e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$).

4.5. Aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales

Como hemos visto en la introducción del tema, un sistema de oscilaciones acopladas da lugar a un sistema de ecuaciones diferenciales. Además de sistemas masa-resorte acoplados, veamos otros ejemplos típicos de problemas que nos llevan a sistemas de ecuaciones lineales de primer orden como circuitos eléctricos compuestos por varios recorridos, problemas de mezclas en tanques conectados y problemas de calentamiento o enfriamiento de edificios.

4.5.1. Sistemas masa-resorte acoplados

Supongamos que tenemos un sistema masa-resorte acoplado formado por dos masas m_1 y m_2 y tres resortes con constantes k_1, k_2 y k_3, respectivamente (ver Figura 4.2). Inicialmente, desplazamos las masas poniendo el sistema en movimiento. Veamos cuáles son las ecuaciones que describen el movimiento de este sistema.

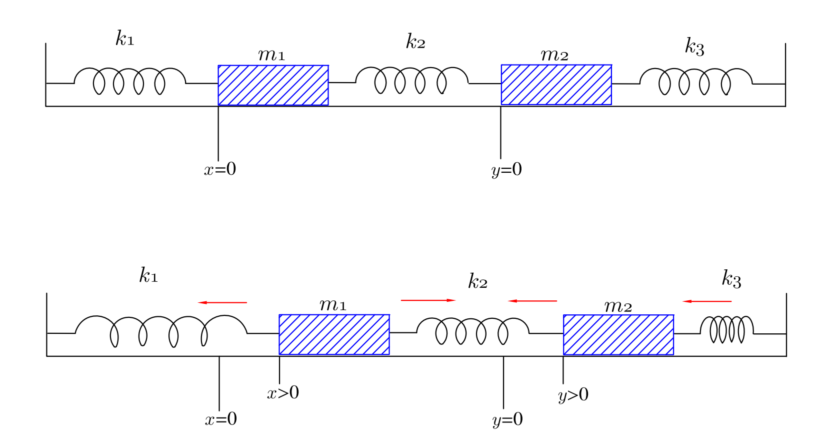


Figura 4.2: Sistema masa-resorte acoplado.

Como en el ejemplo de la introducción, determinamos las ecuaciones del movimiento de este sistema, aplicando la segunda ley de Newton y la ley de Hooke.

Sea $x(t)$ el desplazamiento de las masa m_1 en un instante t y sea $y(t)$ el desplazamiento de las masa m_2 en un instante t. Veamos qué fuerzas actúan sobre cada masa debidas a los resortes.

- Sobre m_1 actúan dos fuerzas, una fuerza F_1 debida al resorte de constante k_1 :
$$F_1 = -k_1 x(t)$$
y una fuerza F_2 debida al resorte de constante k_2 :
$$F_2 = k_2(y(t) - x(t)).$$
El signo y dirección de F_2 viene determinado por el signo de $y(t) - x(t)$, es decir, depende de que dicho muelle haya sido estirado o contraído.

- Sobre la masa m_2 actúan dos fuerzas, una fuerza F_3 debida al resorte de constante k_2 :
$$F_3 = -k_2(y(t) - x(t))$$
y una fuerza $F_4 = -k_3 y(t)$, debida al resorte de constante k_3 :
$$F_4 = -k_3 y(t),$$
que sólo depende del desplazamiento de la masa m_2.

Aplicando la segunda ley de Newton, tenemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1\, x''(t) = -k_1\, x(t) + k_2(y(t) - x(t)) \\ \\ m_2\, y''(t) = -k_2(y(t) - x(t)) - k_3 y(t) \end{array} \right.$$

o bien,

$$\left\{ \begin{array}{l} x''(t) = -\dfrac{k_1 + k_2}{m_1}\, x(t) + \dfrac{k_2}{m_1}\, y(t) \\ y''(t) = \dfrac{k_2}{m_2}\, x(t) - \dfrac{k_2 + k_3}{m_2}\, y(t) \end{array} \right.$$

con las condiciones iniciales:

$$\begin{array}{ll} x(0) = x_0 & x'(0) = v_0 \\ y(0) = y_0 & y'(0) = w_0 \end{array}$$

siendo x_0 e y_0 los desplazamientos iniciales de las masas m_1 y m_2, respectivamente y v_0 y w_0 las velocidades iniciales que se les imprime a las masas m_1 y m_2, respectivamente, al soltarlas.

Transformemos este sistema de dos ecuaciones lineales de segundo orden en un sistema de cuatro ecuaciones lineales de primer orden llamando $x_1(t) = x(t)$,

$x_2(t) = y(t)$, $x_3(t) = x'(t) = x_1'(t)$ y $x_4(t) = y'(t) = x_2'(t)$, entonces:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1'(t) = x_3(t) \\ x_2'(t) = x_4(t) \\ x_3'(t) = -\dfrac{k_1+k_2}{m_1}\,x_1(t) + \dfrac{k_2}{m_1}\,x_2(t) \\ x_4'(t) = \dfrac{k_2}{m_2}\,x_1(t) - \dfrac{k_2+k_3}{m_2}\,x_2(t). \end{array}\right. \tag{4.22}$$

Cuando resolvamos este sistema de ecuaciones $x_1(t)$ y $x_3(t)$ nos proporcionarán la posición, en un instante t, de las masas m_1 y m_2 respectivamente; es decir, tendremos las ecuaciones del movimiento. Pero además, se tendrán también las velocidades de ambas masas en cada instante t, dadas por $x_2(t)$ y $x_4(t)$, respectivamente.

⬢ **Ejemplo 4.17.** Supongamos que tenemos el sistema masa-resorte de la Figura 4.2 donde $k_1 = k_2 = k_3 = k$ y $m_1 = m_2 = m$. Si inicialmente se desplaza sólo la masa m_2 una distancia $d > 0$, es decir, hacia la derecha, determinemos las ecuaciones del movimiento.

Solución. En este caso, el sistema anterior (4.22) queda:

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & 0 & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de la matriz de coeficientes son $\pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$ y $\pm\sqrt{\frac{3k}{m}}i$.

Tomemos el valor propio $r = -\sqrt{\frac{k}{m}}i$ para hallar los vectores propios asociados:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{k}{m}}i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{k}{m}}i & 0 & 1 \\ -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & \sqrt{\frac{k}{m}}i & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & 0 & \sqrt{\frac{k}{m}}i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

el sistema asociado es:

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{\frac{k}{m}}iv_1 + v_3 = 0 \\ \sqrt{\frac{k}{m}}iv_2 + v_4 = 0 \\ -\frac{2k}{m}v_1 + \frac{k}{m}v_2 + \sqrt{\frac{k}{m}}iv_3 = 0. \end{array}\right.$$

Las soluciones de este sistema compatible indeterminado son de la forma $v_2 = v_1$, $v_3 = -\sqrt{\frac{k}{m}}iv_1$, $v_4 = -\sqrt{\frac{k}{m}}iv_1$. Un vector propio complejo asociado a este valor es:

$$\vec{z}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{\frac{k}{m}}i \\ -\sqrt{\frac{k}{m}}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - i \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix}.$$

Por tanto, dos soluciones reales asociadas al par $\pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$ son:

$$\vec{x}_1 = \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}_2 = \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \sqrt{\frac{k}{m}} \end{pmatrix}.$$

Tomemos ahora el valor propio $r = -\sqrt{\frac{3k}{m}}i$ para hallar los vectores propios asociados al otro par de complejos:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\frac{3k}{m}}i & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3k}{m}}i & 0 & 1 \\ -\frac{2k}{m} & \frac{k}{m} & \sqrt{\frac{3k}{m}}i & 0 \\ \frac{k}{m} & -\frac{2k}{m} & 0 & \sqrt{\frac{3k}{m}}i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

el sistema asociado es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{\frac{3k}{m}}iv_1 + v_3 = 0 \\ \sqrt{\frac{3k}{m}}iv_2 + v_4 = 0 \\ -\frac{2k}{m}v_1 + \frac{k}{m}v_2 + \sqrt{\frac{3k}{m}}iv_3 = 0. \end{array} \right.$$

Las soluciones son de la forma $v_2 = -v_1$, $v_3 = -\sqrt{\frac{3k}{m}}iv_1$, $v_4 = \sqrt{\frac{3k}{m}}iv_1$. Un vector propio complejo asociado a este valor es:

$$\vec{z}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{\frac{3k}{m}}i \\ \sqrt{\frac{3k}{m}}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{3k}{m}} \\ -\sqrt{\frac{3k}{m}} \end{pmatrix},$$

y dos soluciones reales asociadas al par $\pm\sqrt{\frac{3k}{m}}i$ son:

$$\vec{x}_3 = \cos(\sqrt{\frac{3k}{m}}t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin(\sqrt{\frac{3k}{m}}t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{3k}{m}} \\ -\sqrt{\frac{3k}{m}} \end{pmatrix},$$

$$\vec{x}_4 = \sin(\sqrt{\frac{3k}{m}}t)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos(\sqrt{\frac{3k}{m}}t)\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{\frac{3k}{m}} \\ -\sqrt{\frac{3k}{m}} \end{pmatrix}.$$

La solución general del sistema es:

$$\vec{x}(t) = C_1\vec{x}_1 + C_2\vec{x}_2 + C_3\vec{x}_3 + C_4\vec{x}_4.$$

Aplicamos ahora las condiciones iniciales. Para $t = 0$ se tiene $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = d$, $x_3(0) = 0$ y $x_4(0) = 0$, entonces:

$$\vec{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\sqrt{\frac{k}{m}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + C_4\sqrt{\frac{3k}{m}}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Expresando la solución en términos de la matriz fundamental y teniendo en cuenta la condición inicial dada, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{k}{m}} & 0 & \sqrt{\frac{3k}{m}} \\ 0 & \sqrt{\frac{k}{m}} & 0 & -\sqrt{\frac{3k}{m}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y resolviendo el sistema llegamos a los valores

$$\begin{aligned} C_1 &= -C_3 = \frac{d}{2}, \\ C_2 &= C_4 = 0. \end{aligned}$$

La solución de este problema de valor inicial es:

$$\vec{x}(t) = \frac{d}{2}\vec{x}_1 - \frac{d}{2}\vec{x}_3.$$

Por tanto, las ecuaciones que nos proporcionan los desplazamientos corresponden a la primera y segunda fila de esta solución son:

$$x_1(t) = \frac{d}{2}\left(\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) - \cos(\sqrt{\frac{3k}{m}}t)\right),$$

$$x_2(t) = \frac{d}{2}\left(\cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + \cos(\sqrt{\frac{3k}{m}}t)\right). \blacksquare$$

4.5.2. Problemas de mezclas

Al estudiar las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden vimos cómo modelizar, mediante una ecuación diferencial, la velocidad de cambio de una sustancia disuelta en un líquido contenido en un tanque, en el cual entraba un fluido con una cierta concentración de dicha sustancia y donde la mezcla fluía hacia fuera del tanque. Recordemos que si $x(t)$ es la cantidad de sustancia presente en el tanque en el instante t y $\frac{dx}{dt}$ es la rapidez con que x cambia respecto al tiempo, la ecuación diferencial que modeliza este problema viene dada por:

$$\frac{dx}{dt} = v_e - v_s,$$

donde:

$$v_e(cantidad/t) = \begin{array}{c}\text{velocidad de entrada}\\ \text{del fluido } (vol/t)\end{array} \times \begin{array}{c}\text{concentración al}\\ \text{entrar } (cantidad/vol)\end{array}$$

$$v_s(cantidad/t) = \begin{array}{c}\text{velocidad de salida}\\ \text{del fluido } (vol/t)\end{array} \times \begin{array}{c}\text{concentración al}\\ \text{salir } (cantidad/vol)\end{array}$$

siendo la concentración de salida, la cantidad de sustancia $x(t)$ dividida por el volumen total en el tanque en dicho instante t.

Ahora, vamos a considerar varios depósitos interconectados entre sí, de modo que se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales lineales.

Ejemplo 4.18. Consideremos dos tanques interconectados, conteniendo 1000 litros de agua cada uno de ellos (ver Figura 4.3). El líquido fluye del tanque A hacia el tanque B a razón de 20 l/min y de B hacia A a razón de 10 l/min. Además, una solución de salmuera con una concentración de 2 kg/l de sal fluye hacia el tanque A a razón de 20 l/min, manteniéndose bien agitado el líquido contenido en el interior de cada tanque. La solución diluida fluye hacia el exterior del sistema, desde el tanque A a razón de 10 l/min y desde el tanque B también a razón de 10 l/min. Si inicialmente el tanque B sólo contiene agua y el tanque A contiene 40 kg de sal, calculemos la concentración de sal en el tanque B al cabo de 10 min.

Solución. Sea $x(t)$ la cantidad (kg) de sal en el tanque A en un instante t y sea $y(t)$ la cantidad (kg) de sal en el tanque B en un instante t.

Como sabemos, la velocidad de cambio de la sustancia en un tanque para un tiempo t, debe ser igual a la velocidad a la que dicha sustancia entra en el tanque menos la velocidad a la que lo abandona, es decir,

$$v_e(cant/t) - v_s(cant/t),$$

donde

$$\underbrace{v_e}_{cant/t} = \underbrace{\text{velocidad de entrada del fluido}}_{vol/t} \times \underbrace{\text{concentración al entrar}}_{cant/vol}$$

$$\underbrace{v_s}_{cant/t} = \underbrace{\text{velocidad de salida del fluido}}_{vol/t} \times \underbrace{\text{concentración al salir}}_{cant/vol},$$

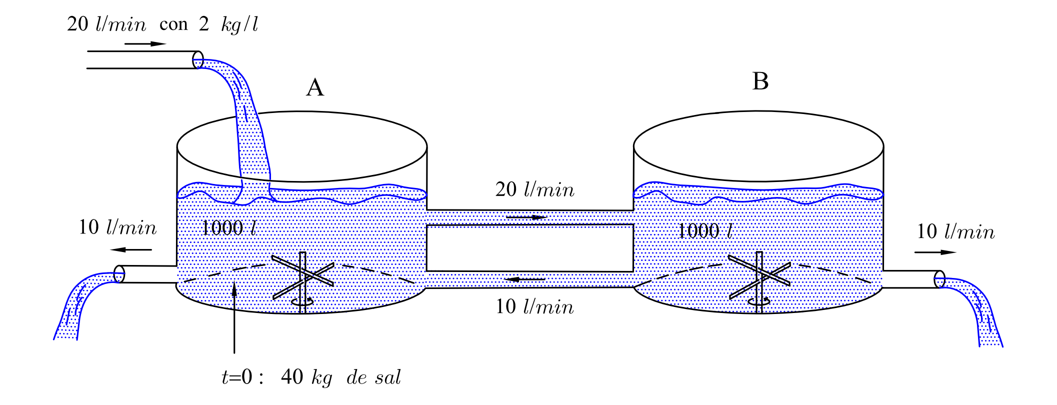


Figura 4.3: Tanques interconectados.

siendo la concentración de salida, la cantidad de sustancia $x(t)$ dividida por el volumen total en el tanque en dicho instante t.

En este caso, tendremos:

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= \left(20\,\mathrm{l/min} \times 2\,\mathrm{kg/l} + 10\,\mathrm{l/min} \times \frac{y(t)}{1000}\,\mathrm{kg/l}\right) - \left((20+10)\,\mathrm{l/min}) \times \frac{x(t)}{1000}\,\mathrm{kg/l}\right) \\
&= 40 + \frac{y(t)}{100} - \frac{3x(t)}{100}. \\
y'(t) &= \left(20\,\mathrm{l/min} \times \frac{x(t)}{1000}\,\mathrm{kg/l}\right) - \left((10+10)\,\mathrm{l/min}) \times \frac{y(t)}{1000}\,\mathrm{kg/l}\right) \\
&= \frac{2x(t)}{100} - \frac{2y(t)}{100}.
\end{aligned}
$$

Obtenemos, por tanto, el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$
\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{2}{100} & \frac{-2}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Comenzamos buscando la solución de la parte homogénea. Calculamos los valores propios:

$$
\begin{vmatrix} \frac{-3}{100} - r & \frac{1}{100} \\ \frac{2}{100} & \frac{-2}{100} - r \end{vmatrix} = r^2 + \frac{5}{100} r + \frac{4}{10000} = 0 \rightarrow \begin{array}{l} r_1 = -0{,}01 \\ r_2 = -0{,}04 \end{array}
$$

y a continuación los vectores asociados:

$$
\begin{aligned}
H_{-0{,}01} &= \{(v_1, v_2) : \begin{pmatrix} -0{,}02 & 0{,}01 \\ 0{,}02 & -0{,}01 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} \\
&= \{(v_1, v_2) : -0{,}02 v_1 + 0{,}01 v_2 = 0\} = \{(v_1, v_2) : v_2 = 2v_1\},
\end{aligned}
$$

$$H_{-0,04} = \{(v_1, v_2) : \begin{pmatrix} 0{,}01 & 0{,}01 \\ 0{,}02 & 0{,}02 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$
$$= \{(v_1, v_2) : 0{,}01v_1 + 0{,}01v_2 = 0\} = \{(v_1, v_2) : v_1 + v_2 = 0\}.$$

Podemos tomar $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ como vectores propios asociados a r_1 y r_2, respectivamente. Por tanto, la solución de la parte homogénea es:

$$\vec{x}_h(t) = C_1 e^{-0{,}01t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-0{,}04t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar una solución particular podemos aplicar el método de los coeficientes indeterminados. Puesto que la parte no homogénea es constante, es decir, es un polinomio de grado 0 y además 0 no es valor propio, suponemos que la solución tiene la forma:

$$\vec{x}_p(t) = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Derivando y sustituyendo en el sistema, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{2}{100} & \frac{-2}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix}$$

haciendo las correspondientes operaciones tenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{-3}{100} & \frac{1}{100} \\ \frac{2}{100} & \frac{-2}{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene: $a_1 = a_2 = 2000$.

Por tanto, la solución general del sistema es:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-0{,}01t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 e^{-0{,}04t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo las condiciones iniciales $x(0) = 40$ e $y(0) = 0$ obtenemos C_1 y C_2 :

$$\begin{pmatrix} 40 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1960 \\ -2000 \end{pmatrix}$$

de donde se obtiene: $C_1 = -1320$ y $C_2 = -640$.

Por tanto, la solución de este problema de valor inicial es:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = -1320 e^{-0{,}01t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 640 e^{-0{,}04t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

y al cabo de 10 minutos se tendrá:

$$\vec{x}(10) = \begin{pmatrix} x(10) \\ y(10) \end{pmatrix} = -1320e^{-0,1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 640e^{-0,4} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \end{pmatrix}.$$

La cantidad de sal en el tanque B será:

$$y(10) = -1320e^{-0,1}2 - 640e^{-0,4}(-1) + 2000 = 237{,}004 \text{ kg}$$

y la concentración de sal en B al cabo de 10 minutos será:

$$\frac{237{,}004 \text{ kg}}{1000 \text{ l}} = 0{,}2370 \text{ kg/l.} \blacksquare$$

4.5.3. Calentamiento de edificios

Consideremos el problema de calentar o de enfriar un edificio con diferentes zonas, de modo que el calor se transfiere de unas zonas a otras en función de la diferencia de temperatura. Suponemos además que alguna de las zonas posee una fuente de calor (o de enfriamiento) que hará que ésta se caliente (o enfríe) en función de su capacidad calorífica. La variación de temperatura en cada zona será la suma del calor (o frío) generado por dicha fuente, si existe en esa zona, y la pérdida o ganancia de calor generada por el contacto con otras zonas o con el exterior.

Para calcular las ecuaciones aplicamos la *ley de Newton del enfriamiento* que establece que la relación de cambio de la temperatura ocasionada por la diferencia de temperatura existente entre dos regiones es proporcional a dicha diferencia. Así, si tenemos dos regiones A y B con temperaturas T_A y T_B, respectivamente, la variación de temperatura en A viene dada por:

$$T'_A = \frac{1}{k}(T_B - T_A),$$

siendo $k > 0$ la constante de tiempo de transferencia entre A y B. Esta constante depende de las propiedades físicas del edificio y se define como el tiempo transcurrido para que la diferencia de temperatura $T_B - T_A$ cambie a $\frac{T_B - T_A}{e}$.

Podemos observar que si $T_B > T_A$, entonces $T'_A > 0$ y por tanto, T_A crece; por el contrario, si $T_B < T_A$, entonces T_A decrece.

⬢ **Ejemplo 4.19.** Un estudio consta de dos zonas: la zona A de la planta alta y la zona B de la planta baja (ver Figura 4.4). La planta baja, que tiene una capacidad calorífica de (1/5) °C /1000 btu (btu: unidades térmicas británicas), es calentada por un calefactor que genera 90000 btu por hora. Las constantes de tiempo de transferencia de calor son: 3 horas entre la planta baja y el exterior, 1/2 hora entre la planta alta y el exterior y 1/2 hora entre las dos plantas. Si la temperatura en el exterior permanece constante a 2 °C e inicialmente ambas zonas estaban a 22 °C, calculemos la temperatura en la planta baja al cabo de 1 hora.

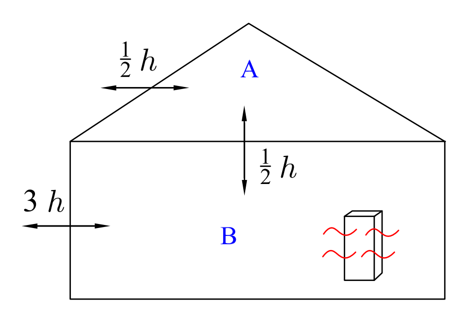


Figura 4.4: Calentamiento de edificio compuesto por dos zonas.

Solución. En este caso, tenemos tres regiones, la zona A, la zona B y el exterior, luego tendremos que tener en cuenta la transferencia de calor entre las tres.

Sea $x(t)$ la temperatura en la zona A en un instante t y sea $y(t)$ la temperatura en la zona B en un instante t.

La zona B recibe el calor generado por el calefactor a razón de 90000 btu/h, puesto que su capacidad calorífica es de (1/5) ºC/1000 btu, tendremos que la temperatura que gana B es:

$$90000 \text{ btu/h} \times (1/5)\ ^{\circ}\text{C}/1000 \text{ btu} = 18\ ^{\circ}\text{C/h}.$$

La variación de temperatura en las zonas A y B vendrá dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= 2(2-x) + 2(y-x) \\
\frac{dy}{dt} &= \frac{1}{3}(2-y) + 2(x-y) + 18.
\end{aligned}$$

Tenemos, por tanto, el sistema no homogéneo:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -4x + 2y + 4 \\
\frac{dy}{dt} &= 2x - \frac{7}{3}y + \frac{56}{3}
\end{aligned}$$

o bien:

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{56}{3} \end{pmatrix}.$$

Resolvamos el sistema. La ecuación característica es:

$$\begin{vmatrix} -4-r & 2 \\ 2 & -\frac{7}{3}-r \end{vmatrix} = 0 \to 3r^2 + 19r + 16 = 0,$$

cuyas raíces son los valores propios: $r_1 = -1$ y $r_2 = -\frac{16}{3}$. Calculemos los vectores propios asociados a cada valor:

$$H_{-1} = \{(x,y) : \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{(x,y) : -3x + 2y = 0\},$$

$$H_{-16/3} = \{(x,y) : \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{(x,y) : 2x + 3y = 0\}.$$

Por tanto, un vector propio asociado a $r_1 = -1$ es $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y un vector propio asociado a $r_2 = -\frac{16}{3}$ es $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ y la solución de la parte homogénea resulta:

$$\vec{x}_h(t) = \begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-16t/3} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Buscamos ahora una solución particular mediante el método de los coeficientes indeterminados. Puesto que el término no homogéneo es un polinomio de grado 0 y además 0 no es raíz de la ecuación característica, podemos tomar la solución particular de la forma:

$$\vec{x}_p = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ \frac{56}{3} \end{pmatrix}$$

pasando el término independiente al otro lado de la igualdad,

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -\frac{7}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -\frac{56}{3} \end{pmatrix}$$

de donde obtenemos: $a_1 = 35/4$ y $a_2 = 31/2$. La solución general es:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 e^{-16t/3} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35/4 \\ 31/2 \end{pmatrix}.$$

Considerando las condiciones iniciales: para $t = 0$, $x(0) = 22$ y $y(0) = 22$, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 22 \\ 22 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35/4 \\ 31/2 \end{pmatrix}.$$

Agrupando los términos independientes y reescribiendo los sumandos multiplicados por las constantes C_1 y C_2 en términos de la matriz fundamental, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53/4 \\ 13/2 \end{pmatrix}$$

y resolviendo el sistema obtenemos:

$$C_1 = 46/13 \qquad \text{y} \qquad C_2 = 107/52.$$

La solución de este problema de valor inicial es:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \frac{46}{13} e^{-t} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{107}{52} e^{-16t/3} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 35/4 \\ 31/2 \end{pmatrix}.$$

Puesto que la temperatura en B era $y(t)$, ésta al cabo de 1h será:

$$y(1) = \frac{46}{13} e^{-t} 3 + \frac{107}{52} e^{-16t/3} (-2) + \frac{31}{2} \approx 19{,}405°\text{C}. \blacksquare$$

4.5.4. Circuitos eléctricos

Consideramos ahora circuitos compuestos por varias mallas.

Un camino cerrado en un circuito eléctrico recibe el nombre de **malla**.

En la Figura 4.5 tenemos un circuito formado por tres mallas: (1) $ABMNA$, (2) $BJKMB$ y (3)$ABJKMNA$.

Los puntos donde se unen dos o más mallas reciben el nombre de **nudos** o **puntos de ramificación**.

La dirección del flujo de corriente se designa arbitrariamente. Además de la *ley de Kirchhoff* de la tensión, vista en el tema anterior, aplicaremos ahora la ley de Kirchhoff para la corriente que establece que en una red eléctrica, la corriente total que llega a un nudo es igual a la corriente total que sale de él.

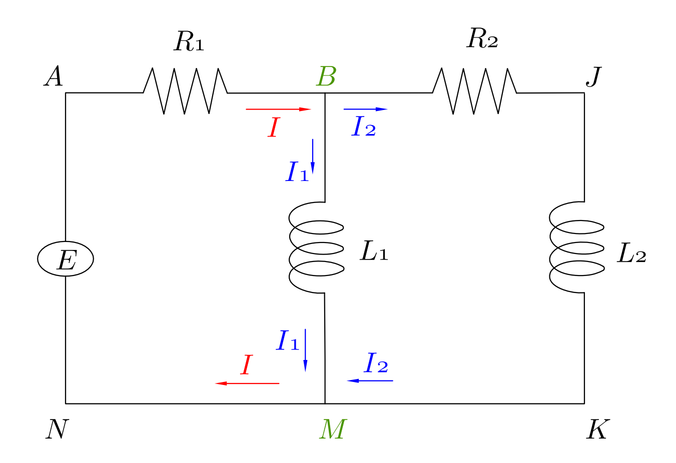


Figura 4.5: Circuito formado por tres mallas.

Ejemplo 4.20. Determinemos el sistema de ecuaciones diferenciales que modeliza el circuito de la Figura 4.5 si E es una fuerza electromotriz constante de 30 V, R_1 es una resistencia de 10 Ω, R_2 es una resistencia de 20 Ω, L_1 es un inductor de 0,02 H, L_2 es un inductor de 0,04 H e inicialmente, las corrientes son 0. Calculemos además, las corrientes en cada instante t.

Solución. Para la malla (1) las caídas de tensión son las siguientes:

$$V_{R_1} = 10I,$$
$$V_{L_1} = 0{,}02\frac{dI_1}{dt}$$

por tanto,

$$0{,}02\frac{dI_1}{dt} + 10I = 30. \qquad (4.23)$$

Para la malla (2) las caídas de tensión son:

$$
\begin{aligned}
V_{R_2} &= 20I_2,\\
V_{L_2} &= 0{,}04\frac{dI_2}{dt},\\
V_{L_1} &= -0{,}02\frac{dI_1}{dt},
\end{aligned}
$$

esta última con signo negativo debido a que se recorre en sentido opuesto. Como en esta malla no hay fuerza electromotriz, se tiene:

$$
-0{,}02\frac{dI_1}{dt} + 0{,}04\frac{dI_2}{dt} + 20I_2 = 0. \tag{4.24}
$$

Para la malla (3) las caídas de tensión son:

$$
\begin{aligned}
V_{R_1} &= 10I,\\
V_{R_2} &= 20I_2,\\
V_{L_2} &= 0{,}04\frac{dI_2}{dt},
\end{aligned}
$$

por tanto:

$$
10I + 0{,}04\frac{dI_2}{dt} + 20I_2 = 30. \tag{4.25}
$$

Vemos que las tres ecuaciones no son independientes, ya que (4.24)=(4.25)-(4.23); nos quedamos, por tanto, con las ecuaciones (4.23) y (4.25).

Aplicando ahora la ley de Kirchhoff de las corrientes en los nudos, tenemos que:

$$
I = I_1 + I_2,
$$

y sustituyendo I, llegamos al sistema de ecuaciones lineales:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
0{,}02\frac{dI_1}{dt} + 10I_1 + 10I_2 = 30\\[2ex]
10I_1 + 0{,}04\frac{dI_2}{dt} + 30I_2 = 30
\end{array}
\right.
$$

con las condiciones iniciales: $I_1(0) = 0$ e $I_2(0) = 0$.

Resolvamos a continuación el sistema de ecuaciones. Para ello, lo escribimos en forma normal:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\frac{dI_1}{dt} = -500I_1 - 500I_2 + 1500\\[2ex]
\frac{dI_2}{dt} = -250I_1 - 750I_2 + 750
\end{array}
\right.
$$

y lo expresamos matricialmente:

$$
\begin{pmatrix} I_1'(t)\\ I_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -500 & -500\\ -250 & -750 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1(t)\\ I_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1500\\ 750 \end{pmatrix}.
$$

La ecuación característica es:

$$
\begin{vmatrix} -500-r & -500\\ -250 & -750-r \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 250\,000 + 1250r + r^2 = 0,
$$

cuyas raíces son los valores propios: $r_1 = -1000$ y $r_2 = -250$. Calculemos los vectores propios asociados a cada valor:

$$H_{-1000} = \{(x,y) : \begin{pmatrix} 500 & -500 \\ -250 & 250 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{(x,y) : x - y = 0\},$$

$$H_{-250} = \{(x,y) : \begin{pmatrix} -250 & -500 \\ -250 & -500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\} = \{(x,y) : -x - 2y = 0\}$$
$$= \{(x,y) : x = -2y\}.$$

Así, un vector propio asociado a $r_1 = -1000$ es $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ y un vector propio asociado a $r_2 = -250$ es $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Entonces, la solución de la parte homogénea es:

$$\vec{I}_H(t) = C_1 e^{-1000t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-250t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Buscamos ahora una solución particular. Como el término no homogéneo es un polinomio de grado 0 y además 0 no es raíz de la ecuación característica, podemos tomar la solución particular de la forma:

$$\vec{I}_p = \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Derivando y sustituyendo en la ecuación, tenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -500 & -500 \\ -250 & -750 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1500 \\ 750 \end{pmatrix}$$

reagrupando términos:

$$\begin{pmatrix} -500 & -500 \\ -250 & -750 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1500 \\ -750 \end{pmatrix},$$

de donde obtenemos: $a_1 = 3$ y $a_2 = 0$.

Luego la solución general es:

$$\vec{I}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 e^{-1000t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-250t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Considerando ahora las condiciones iniciales, $I_1(0) = 0$ e $I_2(0) = 0$, se tiene:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pasando al otro lado de la igualdad el término independiente y escribiendo los sumandos multiplicados por las constantes en términos de la matriz fundamental obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y resolviendo el sistema tenemos que:

$$C_1 = -1 \qquad \text{y} \qquad C_2 = 1.$$

Por tanto, la solución de este problema de valor inicial es:

$$\vec{I}(t) = \begin{pmatrix} I_1(t) \\ I_2(t) \end{pmatrix} = -e^{-1000t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-250t}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Ejercicios de la sección 4.5

1. Determina las ecuaciones del movimiento del sistema masa-resorte de la Figura 4.2 para $k_1 = k_2 = 2$ N/m, $k_3 = 3$ N/m, $m_1 = 2$ kg y $m_2 = 3$ kg, si inicialmente sólo se desplaza la masa m_2 una distancia de 1m hacia la derecha y se suelta, poniendo el sistema en movimiento.

   (Solución: $\vec{x}(t) = \dfrac{3}{5}\begin{pmatrix} \cos t \\ \cos t \\ -\sin t \\ -\sin t \end{pmatrix} - \dfrac{3}{5}\begin{pmatrix} \cos(2\sqrt{\frac{2}{3}}t) \\ -\frac{2}{3}\cos(2\sqrt{\frac{2}{3}}t) \\ -2\sqrt{\frac{2}{3}}\sin(2\sqrt{\frac{2}{3}}t) \\ \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\sin(2\sqrt{\frac{2}{3}}t) \end{pmatrix}$).

2. Consideremos dos tanques, A y B, conteniendo 1000 litros de agua cada uno de ellos e interconectados. El líquido fluye del tanque A hacia el tanque B a razón de 30 l/min y del tanque B hacia el A a razón de 10 l/min. Una solución de salmuera con una concentración de 2 kg/l de sal fluye hacia el tanque A a razón de 60 l/min, manteniéndose bien agitado el líquido contenido en el interior de cada tanque. La solución diluida fluye hacia el exterior del sistema, desde el tanque A a razón de 40 l/min y desde B a razón de 20 l/min. Si inicialmente el tanque A sólo contiene agua y el tanque B contiene 200 kg de sal, calcula qué cantidad de sal habrá en cada tanque al cabo de 10 min.

   (Solución: 879,213 kg en el tanque A y 280,732 kg en el tanque B).

3. Dos tanques A y B, cada uno de ellos conteniendo 50 litros de agua, se encuentran interconectados. El líquido fluye del tanque A hacia el tanque B a razón de 5 l/min. Una solución de salmuera con una concentración de 3 kg/l de sal fluye hacia el tanque A a razón de 5 l/min, manteniéndose bien agitado el líquido contenido en el interior de cada tanque. La solución diluida fluye hacia el exterior del sistema, desde el tanque B a razón de 4 l/min. Si inicialmente tanto el tanque A como el B contienen 50 kg de sal, determina el sistema de ecuaciones diferenciales que modeliza este problema.

   (Solución: $x'(t) = -\frac{1}{10}x + 15$, $y'(t) = \frac{1}{10}x - \frac{4}{50+t}y$, con $x(0) = 50$, $y(0) = 50$).

4. Dos depósitos interconectados contienen 2000 l de agua contaminada cada uno de ellos. El agua contaminada empieza a fluir al depósito A a

razón de 90 l/min con una concentración de contaminantes de 2 kg/l, el líquido fluye del depósito A al depósito B a razón de 10 l/min. Supongamos que el líquido contenido en el interior de cada depósito se mantiene bien agitado. La solución fluye hacia el exterior del sistema desde A a razón de 80 l/min y desde B a razón de 10 l/min. Inicialmente A contenía 10 kg de contaminante y B estaba limpio de contaminantes. Calcula la cantidad de contaminantes que alcanzará cada uno de los depósitos a lo largo del tiempo y la concentración en A al cabo de 2 h.

(Solución: $x(t) = 4000 - 3990\, e^{-9t/200}$, $y(t) = 4000 + \frac{1995}{4}\, e^{-9t/200} - \frac{17995}{4}\, e^{-t/200}$, la concentración en A al cabo de 2 h es aproximadamente de 1.99099 kg).

5. Consideremos un edificio que consta de dos zonas, A y B. La zona A es calentada con un calefactor que genera 80000 btu/hora siendo la capacidad calorífica de esta zona (1/8) °C/1000 btu. Las constantes de transferencia de calor son: 4 horas entre la zona A y el exterior, 4 horas entre la zona B y el exterior y 2 horas entre ambas zonas. Si la temperatura en el exterior permanece constante a -10 °C y para el instante $t = 0$ ambas zonas estaban a 25 °C, calcula cuál será la temperatura en cada zona al cabo de 4 horas. ¿A qué temperatura puede llegar (a enfriarse) la zona no calentada B?

   (Solución: $x(4) \approx 19{,}49$ °C, $y(4) \approx 11{,}54$ °C. $\lim_{t \to \infty} y(t) = 6$ °C).

6. Determina el sistema de ecuaciones diferenciales que modeliza el circuito de la Figura 4.5. Calcula las intensidades de corriente en cada instante t para este circuito si $L = 1$H, $R = 1\Omega$, $C = 0{,}1$F y $E(t) = 1$V.

   (Solución: $I_1(t) = \frac{25}{2}e^{-9t} - \frac{225}{2}e^{-t} + 10$; $I_2(t) = -\frac{45}{4}e^{-9t} + \frac{45}{4}e^{-t}$).

Bibliografía

[1] P. Blanchard, R.L. Devaney, G.R. Hall (1999): *Ecuaciones diferenciales*. International Thomson Editores, México.

[2] R.Borelli, C.S. Coleman (2002): *Ecuaciones diferenciales*. Oxford University Press, México.

[3] W.E. Boyce, R. C. DiPrima (2010): *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial Limusa, México.

[4] M. Braun (1990): *Ecuaciones diferenciales y sus aplicaciones*. Grupo Editorial Iberoamérica, México.

[5] C.H. Jr. Edwards, D. Penney (2005): *Ecuaciones diferenciales*. Prentice Hall, México.

[6] Henry Ricardo (2008): *Ecuaciones diferenciales: una introducción moderna*. Editorial Reverté, Barcelona.

[7] A. Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko (1993): *Problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*. Editorial Mir, Madrid.

[8] M. López Rodríguez (2007): *Problemas Resueltos de Ecuaciones diferenciales*. Thomson, España.

[9] R. K. Nagle, E. B. Saff (2005): *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Prentice Hall, México.

[10] P. Puig Adam (1976) *Curso Teórico-Práctico de Ecuaciones Diferenciales Aplicado a la Física y Técnica*. Biblioteca Matemática, Madrid.

[11] F. Simmons (1990): *Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas*. Editorial McGraw-Hill, Madrid.

[12] M. Tenenbaum, H. Pollard (1963): *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, Inc. New York.

[13] D. G. Zill (2009): *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*. Editorial Thomson Paraninfo, México.